Titre	Catégorie	Origine	Domaine mathématique
1. Une coupe de glaces avec des amis	3	RZ	Logique. Analyse de possibilités.
2. Les tampons d'Emmanuelle et de Luc	3 4	GTNU	Numération. Chiffres et nombres.
3. Isidore et le feuilleton des entiers !	3 4	GTNU	Numération. Chiffres et nombres.
4. Des carrés sur une figure	3 4	LUX	Géométrie plane. Constructions de carrés.
5. Lancers dans des paniers	3 4 5	SI	Numération. Constructions de nombres.
6. Le robot Robert	4 5 6	GTCP	Parcours sur un réseau et proportionnalité.
7. La frise d'Annie	4 5 6	GTAL	Calcul d'une aire dans une frise périodique.
8. L'heure de l'horloge digitale	5 6 7	BL	Mesures de temps et opérations sur les heures.
9. Les dragons	5 6 7	BB	Déterminer 3 nombres dans des conditions simples.
10. Les quadrilatères de Patricia	5 6 7 8	SR	Géométrie plane. Quadrilatères de mêmes aires.
11. Les prunes	5 6 7 8	GTCP	Opérations et proportions.
12. Les anniversaires	6 7 8	RV	Arithmétique. Recherche de couples d'entiers
13. Une boîte particulière	7 8 9 10	GTGE	Géométrie, dessins des faces d'un prisme.
14. Le plateau triangulaire	7 8 9 10	PU	Géométrie plane. Aires de triangles et hexagones
15. Sac de haricots	8 9 10	RV	Arithmétique. Divisibilité et restes.
16. Madame papillon	8 9 10	GTGP	Géométrie. Aires de triangles ou d'un trapèze.
17. Un col des Alpes en vélo	9 10	FC	Calculs de vitesses moyennes.
18. Robot-alpha	9 10	GTAL	Parcours sur une grille. Suite numérique.
19. Gagner avec un dé	9 10	FC	Probabilités élémentaires. Événement contraire.

1. UNE COUPE DE GLACES AVEC DES AMIS (Cat. 3)

Six amis se retrouvent pour manger des glaces ensemble.

Chacun commande une coupe formée de quatre boules de glaces, mais il n'y a que deux arômes à disposition : des boules à la fraise, des boules au chocolat.

Les six amis pourront-ils avoir des coupes avec des compositions toutes différentes des quatre boules, avec les deux arômes à disposition ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de 2 objets pris 4 par 4 (4 boules de glaces et deux parfums)

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque coupe de glaces peut être composée seulement de fraise ou seulement de chocolat ou des deux parfums ensemble.
- Représenter la situation avec un schéma ou avec un dessin : il y a deux coupes formées d'un seul parfum (F-F-F-F et C-C-C-C), une coupe formée de deux boules au chocolat et deux boules à la fraise (C-C-F-F) et deux coupes formées de trois boules de glaces d'un parfum et une boule de l'autre (C-C-C-F et F-F-F-C).
- Comprendre que la « position » du parfum ne change pas le type de coupe de glaces, par exemple C-F-C-C et C-C-F-C représentent la même coupe.
- En déduire qu'il y a seulement cinq coupes de glaces possibles : F-F-F-F ; C-C-C-C ; C-F-F-F ; F-C-C-C ; F-F-C-C et que les six amis ne pourront pas tous avoir une coupe différente.

Niveau : 3

Origine : Rozzano

2. LES TAMPONS D'EMMANUELLE ET DE LUC (Cat. 3, 4)

Emmanuelle possède 5 tampons avec lesquels elle peut imprimer ces chiffres : 0-2-4-6-8.

Luc a aussi 5 tampons avec lesquels il peut imprimer ces chiffres : 1-3-5-7-9.

Combien de nombres plus petits que 100 Emmanuelle peut-elle imprimer avec ses tampons et combien Luc peut-il en imprimer avec les siens ?

Montrez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer et compter tous les nombres à un ou deux chiffres, de 0 à 99, qui s'écrivent en employant seulement les chiffres « pairs » ou seulement les chiffres « impairs ».

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il n'est pas possible partager les cent nombres en deux parties parce qu'il ne s'agit pas de rechercher les nombres pairs et les nombres impairs (les nombres écrits avec deux chiffres, l'un pair et l'autre impair ne peuvent être imprimés ni par Luc ni par Emmanuelle).
- Comprendre que pour imprimer les nombres inférieurs à 10 il suffit d'un seul tampon, alors que pour les nombres de 10 à 99, il faut utiliser deux tampons.
- Écrire la liste de tous les nombres de 0 à 99, mettre en évidence de manière différente les nombres d'Emmanuelle et ceux de Luc, et procéder aux comptages de chaque partie.

Ou bien,

- écrire et compter séparément les nombres d'Emmanuelle et de Luc : il y en a 5 pour les nombres d'Emmanuelle formés d'un seul chiffre (0, 2, 4, 6, 8) et 5 pour ceux de Luc (1, 3, 5, 7, 9). Par contre pour les nombres à deux chiffres il y en a 25 pour Luc (11.13.15.17.19 ; 31.33.35.37.39 ; 51.53.55.57.59 ; 71.73.75.77.79 ; 91.93.95.97.99) et 20 pour Emmanuelle (20.22.24.26.28 ; 40.42.44.46.48 ; 60.62.64.66.68 ; 80.82.84.86.88), parce que tous les chiffres impairs peuvent occuper la place des dizaines ou celle des unités, alors que pour les chiffres pairs, le zéro ne peut occuper que la place des unités.

Ou bien (avec un comptage de type combinatoire),

- après une première phase de recherche, se rendre compte, éventuellement en recourant à une représentation graphique, qu'on peut former tous les nombres à deux chiffres de Luc en combinant les cinq possibilités pour les chiffres des dizaines avec les cinq possibilités pour les chiffres des unités et compter ainsi $25 = 5 \times 5$ nombres ; alors qu'en procédant de la même manière avec les chiffres pairs pour former les nombres d'Emmanuelle, on doit exclure les cinq nombres qui ont 0 comme dizaines, on obtient donc $20 = 4 \times 5$ nombres. Considérer ensuite les 5 nombres à un chiffre de Luc et d'Emmanuelle.
- Conclure qu'il y a 25 nombres possibles pour Emmanuelle, et 30 pour Luc.

Niveaux : 3, 4

Origine : Groupe Numération

3. ISIDORE ET LE FEUILLETON DES ENTIERS ! (Cat. 3, 4)

Lundi, Isidore a écrit tous les nombres entiers de 1 à 100 et a compté les chiffres « 2 » qu'il a écrits. En tout, il a compté vingt chiffres « 2 », le dernier qu'il a écrit était le « 2 » du nombre 92.

Mardi, il continue à écrire la suite des nombres entiers : 101, 102, 103, 104, 105, ...

À un certain moment, il se rend compte qu'au cours de cette journée de mardi il est en train d'écrire le vingt-cinquième chiffre « 2 ».

Quel nombre Isidore est-il en train d'écrire au moment où il écrit le vingt-cinquième chiffre « 2 » ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans l'écriture de la suite des entiers naturels à partir de 101, déterminer quel est le nombre dans lequel le chiffre 2 apparaît pour la 25e fois.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut compter combien de fois le chiffre 2 apparaît dans la suite des entiers à partir de 101, quelle que soit la position à laquelle se trouve ce chiffre 2 : chiffre des unités ou des dizaines ou des centaines.
- Comprendre, à partir de l'exemple, qu'une seule centaine ne sera pas suffisante pour compter 25 fois le chiffre 2.
- Écrire la suite complète des entiers à partir de 101 en ne comptant que le chiffre 2, jusqu'à arriver à la 25e fois.

Ou bien,

- écrire seulement les entiers strictement supérieurs à 100 contenant le chiffre 2 en une position quelconque.

Ou bien,

- procéder de façon organisée : de 101 à 199, le chiffre 2 apparaît 10 fois comme chiffre des unités et 10 fois comme chiffre des dizaines de 120 à 129, pour un total de 20 fois. Il manque donc 5 occurrences du chiffre 2 qui se trouve dans les entiers suivants : 200, 201, 202, 203.
- Conclure que le nombre dans lequel apparaît pour la 25e fois le chiffre 2 est 203.

Ou bien,

- déduire de la première information que l'on écrira 20 fois le chiffre 2 pour écrire les entiers de 101 à 199. Écrire ensuite les entiers 200, 201, 202, 203 pour trouver les cinq occurrences manquantes du chiffre 2.

Niveaux : 3, 4

Origine : Groupe Numération (révision de *Caccia al tre* 10.I.3)

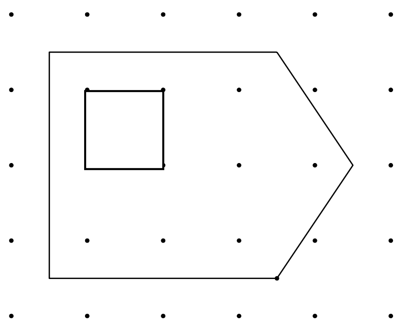
Compte tenu de l'ambiguité de l'énoncé, nous avons également accepté 122, réponse qu'un très grand nombre de classes a touvée.

4. DES CARRÉS SUR UNE FIGURE (Cat. 3, 4)

Sur une feuille de papier, plusieurs points sont marqués de façon régulière, en lignes et en colonnes.

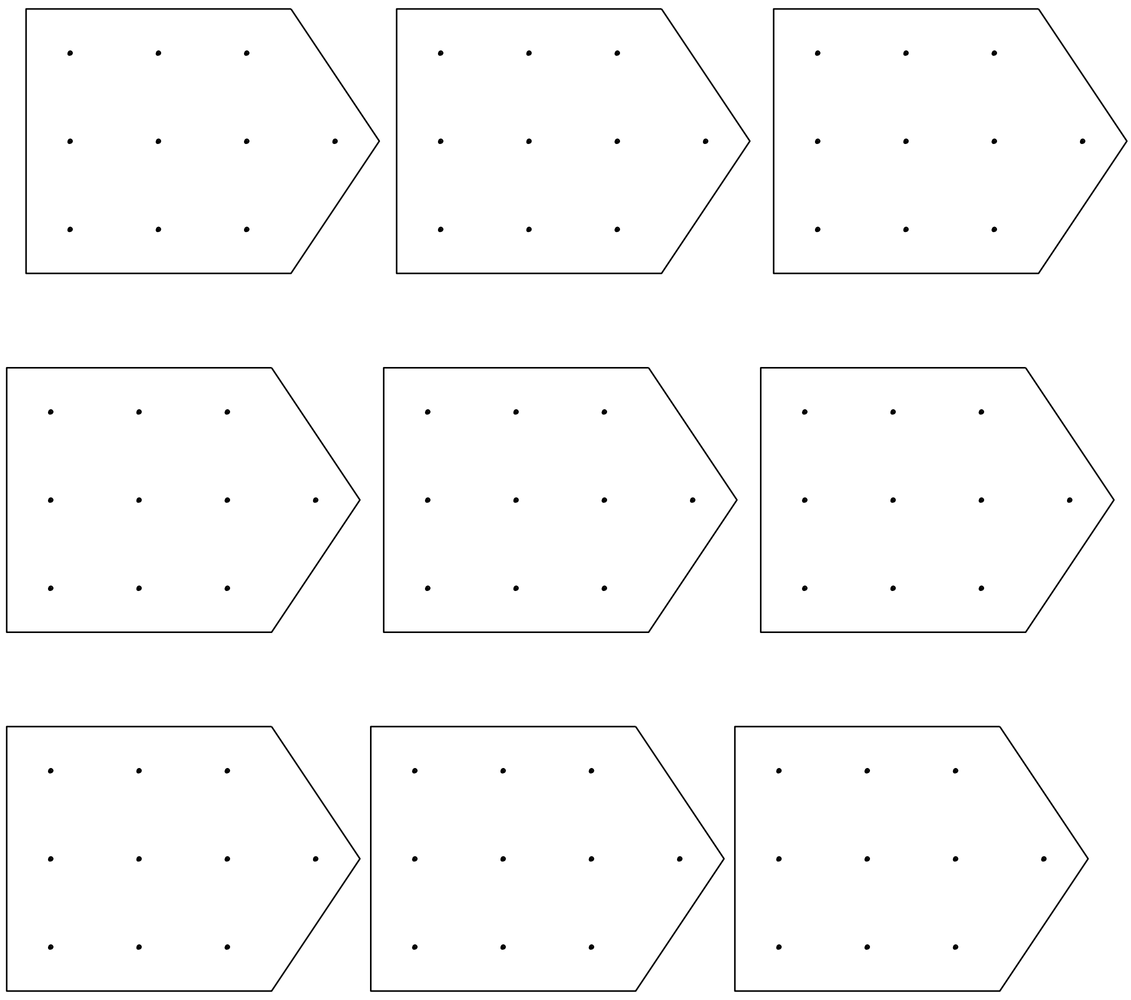
Jean-Marc y a dessiné une figure.

Il a ensuite relié entre eux quatre des points qui sont à l'intérieur de la figure et a obtenu le carré que vous voyez ci-contre.



Puis, Jean-Marc s'aperçoit qu'il peut dessiner d'autres carrés en reliant à chaque fois quatre points parmi ceux qui sont marqués à l'intérieur de la figure.

Dessinez tous les autres carrés possibles en utilisant les figures dont vous avez besoin parmi celles dessinées ci-dessous.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

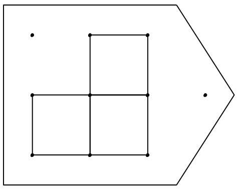
Trouver tous les carrés dont les sommets sont sur quatre points d'un réseau donné, à l'intérieur d'une figure donnée.

Analyse de la tâche

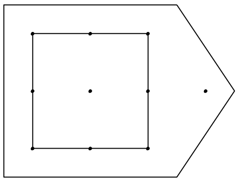
- Comprendre que seuls les points à l'intérieur de la figure peuvent être des sommets des carrés à construire

- Choisir parmi tous les quadrilatères qu'on peut former, ceux qui ont les quatre côtés de la même longueur et deux angles droits. On obtient ainsi les carrés cherchés.
- Constater qu'on peut construire :

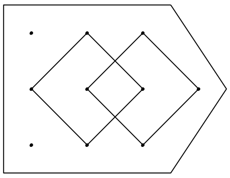
3 autres petits carrés



1 grand carré



2 carrés « obliques »



Niveaux : 3, 4

Origine : Luxembourg

5. LANCERS DANS DES PANIERS (Cat. 3, 4, 5)

En éducation physique, l'enseignante propose un nouveau jeu aux enfants. Chaque enfant doit lancer des balles de tennis dans deux paniers placés l'un à côté de l'autre. Si la balle entre dans le panier de droite, le joueur gagne 1 point ; si elle entre dans le panier de gauche, le joueur marque 10 points.

Anna lance 12 balles et chaque balle arrive dans l'un ou l'autre des deux paniers, puis elle fait le total des points qu'elle a obtenus.

Trouvez tous les totaux qu'Anna peut avoir obtenus.

Montrez en détail comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les différentes sommes de 12 nombres égaux à 1 ou à 10.

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle du jeu et comprendre que chaque balle de tennis rapporte un nombre de points différent : elle vaut 1 point si elle est lancée dans le panier à droite et 10 points si elle va dans le panier de gauche.
- Se rendre compte qu'il y a plusieurs sommes possibles, qui dépendent du nombre de balles entrées dans chacun des paniers.
- Imaginer ou dessiner la situation et calculer à chaque fois les points correspondants.
- Il y a plusieurs manières d'organiser les calculs : additionner les termes un à un (par exemple 1+1+1+1+…+10+10) ou en tenant compte des nombres de 1 et de 10, effectuer les combinaisons de multiplications et additions (par exemple 5×1 + 7×10).

Ou bien,

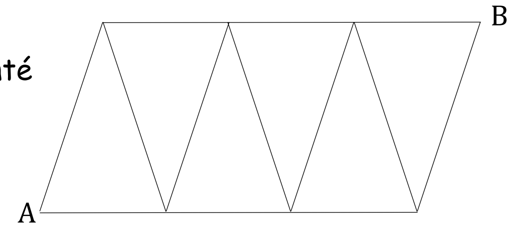
- calculer le score le plus bas, 12 (correspondant à 12 balles dans le panier de droite), trouver le score suivant en enlevant 1 et en ajoutant 10, et ainsi de suite jusqu'à arriver à 120 (correspondant à 12 balles dans le panier de gauche) : 12; 12–1+10 = 21 ; 21–1+10 = 30; 30–1+10 = 39 ; … ; 111–1+10 = 120 (c'est-à-dire additionner 9 à chaque fois).
- De façon symétrique, partir du score le plus élevé, 120, puis, à chaque fois, soustraire 10 et ajouter 1 (c'est-à-dire soustraire 9 à chaque fois) jusqu'à arriver à 12.
- La recherche peut être organisée en un tableau qui met en évidence à la fois la décomposition de 12 en sommes de deux entiers et le nombre obtenu.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

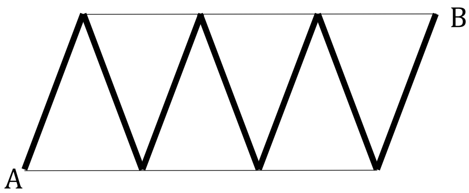
6. LE ROBOT ROBERT (Cat. 4, 5, 6)

Le robot Robert se déplace sur les lignes d'un parcours représenté ici, en faisant des pas qui sont tous de la même longueur.

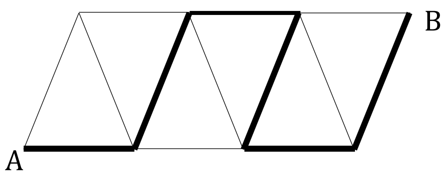


Pour se déplacer de A vers B il peut suivre différents chemins.

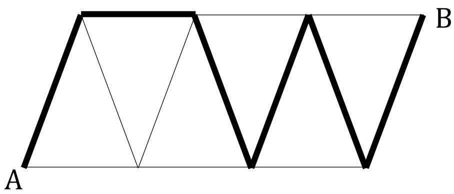
Lorsqu'il suit ce chemin, il fait 56 pas :



Par contre, il fait 36 pas quand il suit cet autre chemin :



Combien de pas fait le robot Robert quand il suit ce chemin-là ?



Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Sur un réseau composé de deux types de segments, des courts et des longs, trouver la longueur d'un chemin composé d'un segment court et 5 segments longs, connaissant la longueur d'un chemin de 7 segments longs (56 pas) et celle d'un chemin de 3 segments courts et 3 segments longs (36 pas).

Analyse de la tâche

- Comprendre que le robot Robert fait toujours un nombre entier de pas pour parcourir un segment de la grille et que pour parcourir des segments égaux, il comptera le même nombre de pas, puisque ses pas ont toujours la même longueur.
- Déduire du premier chemin, composé de 7 segments longs, que chaque segment vaut 8 pas (56 : 7).
- Observer le second chemin et se rendre compte qu'il est formé de 3 segments longs et de 3 segments courts.
- Trouver que pour parcourir les trois segments longs du second chemin, Robert fera 24 pas (8 × 3) et que pour parcourir les segments courts il en fera 12 (36 – 24) ; par conséquent chaque segment court mesure 4 pas (12 : 3).
- Conclure que pour parcourir le troisième chemin, composé de 5 segments longs et 1 segment court, Robert fera 44 pas (8 × 5 + 1 × 4).

Ou bien,

- observer que le second chemin est formé de 3 segments courts et de 3 segments longs et en déduire que pour parcourir 1 segment long et 1 segment court Robert fait 12 pas (36 : 3).
- Procéder par essais pour trouver combien de pas mesure chacun des deux segments (6-6, 7-5, 8-4, 9-3, 10-2, 11-1) et découvrir que l'unique possibilité compatible avec le premier chemin est 8 pas pour le segment long et 4 pas pour le segment court.
- Conclure que Robert fait 44 pas pour le troisième chemin.

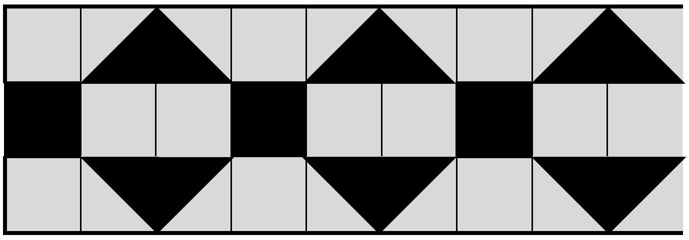
Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Groupe Calcul et Proportionnalité (variante du problème *Le robot Arthur*, 20.II.2)

7. LA FRISE D'ANNIE (Cat. 4, 5, 6)

Sur une feuille de papier quadrillé de son cahier de dessins, Annie a dessiné une frise de deux couleurs, noire et grise.

Voici le début de cette frise :



Annie remarque que dans cette première partie, la zone coloriée en noir correspond à 9 carrés.

Annie continue à dessiner sa frise jusqu'à la fin de sa feuille de papier et quand elle a fini elle remarque que la zone coloriée en noir correspond à 58 carrés.

Sur la frise complète, à combien de carrés correspond la zone coloriée en gris ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'aire de la partie grise d'une frise coloriée en noir et gris, dont le début est dessiné sur du papier quadrillé, en connaissant l'aire totale de la partie noire de la frise entière.

Analyse de la tâche

- Observer le dessin du début de la frise et éventuellement chercher à comprendre la règle de construction.
- Remarquer que la zone coloriée en noir est formée de 3 carrés noirs visibles sur la figure, et de 6 triangles noirs formés de deux demis carrés correspondant donc chacun à un carré. Ainsi les 6 triangles « comptent » pour 6 carrés.
- Pour déterminer le nombre total de carrés de la partie grise on peut procéder de plusieurs manières. Reproduire la frise sur une feuille quadrillée et s'arrêter lorsqu'on a compté 58 carrés noirs. Compter ensuite les carrés correspondant à la partie grise et trouver qu'il y en a 116. Cette procédure est longue et demande de l'attention dans le comptage des carrés.

Ou bien,

- se rendre compte qu'il y a un motif qui se répète, constitué d'une bande verticale de trois carrés avec celui du milieu en noir et d'une autre bande verticale de six carrés avec deux triangles noirs, chacun correspondant à un carré. Dans ce motif, la partie noire correspond donc au total à 3 carrés, alors que la partie grise correspond au double, c'est-à-dire à 6 carrés.
- Déterminer le nombre de motifs dans la frise complète, en cherchant le plus grand multiple de 3 inférieur à 58 ou en effectuant la division avec reste de 58 par 3, et obtenir 19. Se rendre compte qu'avec 19 motifs on arrive à 57 carrés noirs et qu'il y a donc à rajouter un autre carré noir. En déduire que la frise complète se termine avec une bande verticale d'un carré noir et 2 carrés gris.
- Calculer enfin le nombre de carrés gris, en considérant qu'il y en a 6 dans chaque motif et 2 dans la bande terminale de la frise, et trouver que ce nombre est 116 ($6 \times 19 + 2$).
- Il y a encore d'autres modalités pour organiser la décomposition de la frise et faire les calculs correspondants (par ex., en partant de la figure de l'énoncé dans laquelle on « compte » 9 carrés noirs, considérer les multiples de 9, arriver à 54 et en déduire que pour avoir les 4 derniers carrés manquants, la frise doit se continuer avec un motif complet de trois carrés noirs et se terminer avec une bande verticale d'un carré noir et deux gris).

Ou bien (procédure qui suppose un raisonnement de proportionnalité),

- observer que dans chaque bande verticale (constituée de 3 carrés), la partie noire correspond toujours à un carré et donc la partie grise toujours au double, c'est-à-dire à 2 carrés. Par conséquent en sachant que dans la frise complète la zone coloriée en noir correspond à 58 carrés, la partie coloriée en gris correspondra à son double, c'est-à-dire à 116 carrés.

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Groupe Algèbre (reprise du problème *"La décoration de Charles"*, 23. I. 9)

8. L'HEURE DE L'HORLOGE DIGITALE (Cat. 5, 6, 7)

Un soir, à 22 heures 30, à cause d'un fort orage, le courant de la maison de Pierre a été coupé.

Pierre possède une horloge numérique branchée sur l'électricité et un réveil alimenté par une pile. Après une minute le courant revient et l'horloge se réinitialise, c'est-à-dire qu'elle repart de 00:00.

Quelle heure marquera l'horloge le lendemain matin, quand le réveil marquera exactement sept heures ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'heure indiquée par une horloge digitale qui s'était arrêtée à un instant donnée et qui est repartie de 00:00.

Analyse de la tâche

- Remarquer qu'une journée fait 24 heures et qu'une heure fait 60 minutes.
- Savoir que dans les horloges digitales minuit est indiqué 00:00.
- Comprendre que pendant que l'horloge s'arrête à 22:30, le réveil continue à fonctionner normalement.
- Comprendre que l'horloge recommence à fonctionner à 22:31.
- Calculer que de 22:31 jusqu'à minuit il se passe une heure et 29 minutes et que de minuit à sept heures du matin ils passe 7 heures ; additionner 1 h 29 à 7 h 00 et obtenir 8 h 29, l'horloge marquera 8:29 lorsque le réveil marquera 07:00.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Belluno

9. LES DRAGONS (Cat. 5, 6, 7)

Sur une île vivent trois dragons : un rouge, un jaune et un vert. Ils ont chacun plusieurs têtes.

Le dragon rouge a cinq têtes de moins que le dragon vert.

Le dragon jaune a quatre têtes de plus que le dragon vert, et à eux deux ils ont 28 têtes.

Combien de têtes a chacun des dragons ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Résoudre un système « élémentaire » de trois équations linéaires à trois inconnues avec des nombres entiers naturels dans un contexte imaginaire de têtes de dragons.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les nombres de têtes de chaque dragon ne sont pas connus mais que la première information donne la différence, 5, entre le nombre de têtes du dragon rouge et le nombre de têtes du dragon vert. Ces nombres peuvent être : 1 et 6, 2 et 7, 3 et 8, 7 et 12… Et la seconde information donne non seulement la différence, 4, entre le nombre des têtes du dragon jaune et le nombre de têtes du dragon vert mais aussi leur somme, 28.
- Commencer par chercher le nombre de têtes des dragons vert et jaune.
- Procéder par essais, en partant par exemple de 6 têtes pour le dragon vert et donc 10 pour le dragon jaune, vérifier que le total (6 + 10) = 16 est différent de 28, puis poursuivre les essais en les organisant éventuellement (par exemple avec un tableau) pour aboutir à 12 têtes pour le vert et 16 pour le jaune, (12 + 16) = 28, puis se rendre compte que les essais successifs « s'éloignent » de 28, ce qui signifie que la solution est unique.

Ou bien,

- procéder par déduction, éventuellement en utilisant un schéma, en retranchant les 4 têtes de 28 pour obtenir deux nombres égaux dont la somme est 24 : 12 et 12 puis additionner 4 à l'un des deux et trouver 16 et 12.
- Utiliser ensuite la première information, disant que le dragon rouge a 5 têtes de moins que le dragon vert. Sachant que le nombre de têtes du dragon vert est 12, calculer le nombre de têtes du dragon rouge : 12 – 5 = 7.
- Conclure que le dragon rouge a 7 têtes, le dragon vert a 12 têtes et le dragon jaune en a 16

Ou bien,

- Déduire de la seconde information que le total 28 correspond à deux fois le nombre de têtes du dragon vert plus quatre têtes (que le jaune a en plus). Chercher donc, par essais ou par un raisonnement arithmétique ou à l'aide d'une représentation graphique, le nombre dont le double augmenté de 4 donne 28 et comprendre que c'est le nombre de têtes du dragon vert. Puis trouver le nombre de têtes du dragon rouge en exploitant la première information : 12 – 5 = 7.

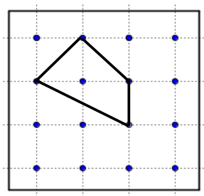
Niveau : 5, 6, 7

Origine : Bourg-en-Bresse

10. LES QUADRILATÈRES DE PATRICIA (Cat. 5, 6, 7, 8)

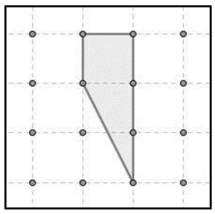
Sur chaque feuille de son cahier, Patricia a dessiné une grille de points 4×4.

Sur une de ces feuilles, Patricia a dessiné ce quadrilatère

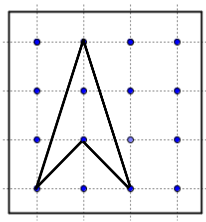


Patricia se demande s'il est possible de dessiner d'autres quadrilatères convexes de même aire que celui ci-dessus, tous différents entre eux, et dont les sommets sont sur les points de la grille.

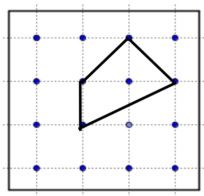
Par exemple, en voici un autre :

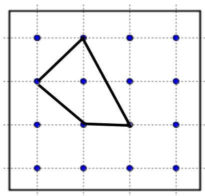


Celui-là n'est pas convexe, il a un angle rentrant :



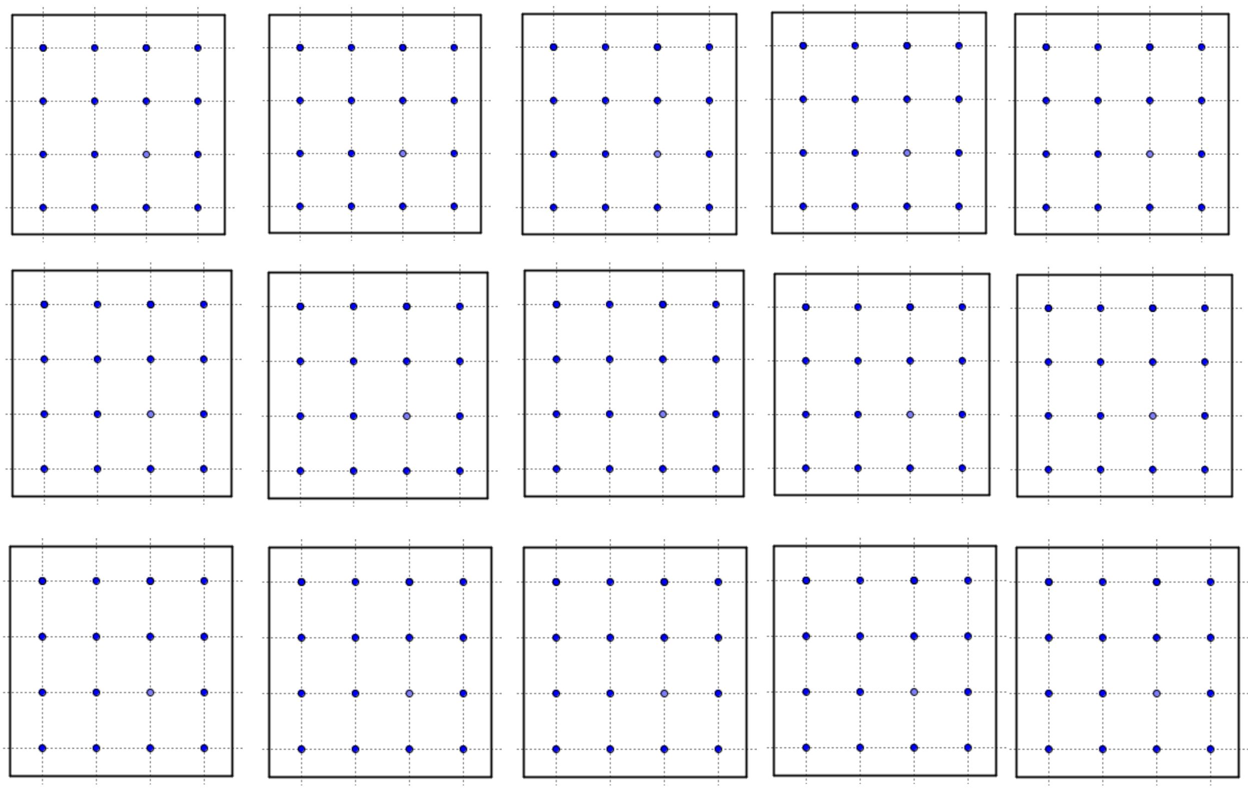
Ceux-ci ne sont pas différents de celui de Patricia, une fois découpés ces quadrilatères peuvent être exactement superposés





Dessinez d'autres quadrilatères convexes, tous différents, qui ont la même aire que celui de Patricia et dont les sommets se trouvent sur des points de la grille.

Trouvez-en le plus possible, utilisez les grilles qui vous sont nécessaires parmi celles qui sont données ci-dessous.



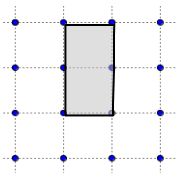
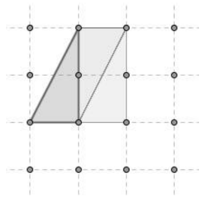
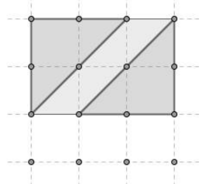
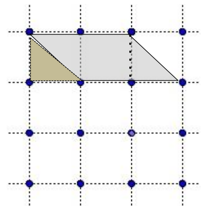
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

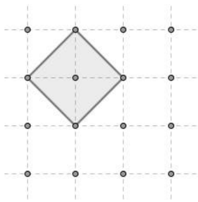
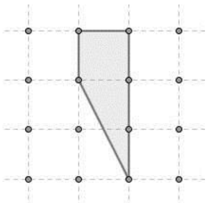
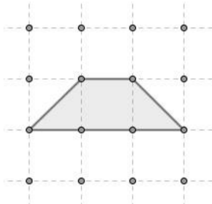
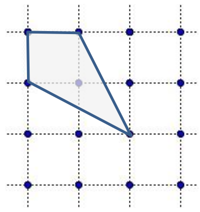
Sur les points d'un quadrillage 4x4, dessiner des quadrilatères convexes dont l'aire vaut 2 carreaux du quadrillage et dont les sommets sont placés sur les points du quadrillage.

Analyse de la tâche

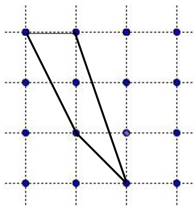
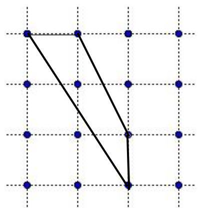
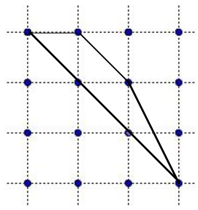
- Observer les exemples, vérifier que le quadrilatère que Patricia a dessiné est convexe.
- Déterminer l'aire du quadrilatère de Patricia : 2 carreaux du quadrillage. Cette aire sera aussi celle de tous les quadrilatères à dessiner.
- Constater qu'il n'y a qu'un quadrilatère convenable formé de deux carrés entiers (le rectangle de 1 x 2), puis se rendre compte que les autres quadrilatères sont formés de moitiés de carreaux ou de rectangles.
- Comprendre que par isométrie, on n'obtient pas un nouveau quadrilatère, mais qu'en faisant glisser horizontalement une base du rectangle, on obtient trois parallélogrammes différents dont l'aire vaut 2 carreaux.

- Par exemple, l'aire du deuxième parallélogramme est la différence entre l'aire d'un rectangle 3x2 et de celles de deux triangles moitiés d'un carré 2x2, elle vaut donc 2 carreaux.
- Trouver ensuite le quadrilatère dont les quatre côtés sont obliques. Puis dans une recherche systématique, construire d'autres quadrilatères convenables ayant un côté confondu avec un côté du quadrillage, parmi ceux-ci il peut même y avoir celui mis en exemple dans l'énoncé :

- Et les trois suivants plus difficiles à trouver :

- Ce qui en fait 12 en tout en comptant celui de Patricia et celui de l'exemple.

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Suisse Romande

11. LES PRUNES (Cat. 5, 6, 7, 8)

Charles a récolté 117 prunes. Il en met une partie dans trois plats à fruits, un petit, un moyen et un grand.

Le nombre de prunes qu'il a mises dans le plat moyen est le double du nombre de celles qu'il a mises dans le petit plat. Le nombre de prunes qu'il a mises dans le grand plat est le double du nombre de celles qu'il a mises dans le plat moyen.

Après avoir rempli les trois plats, il lui reste des prunes, leur nombre est exactement la moitié du nombre de celles que Charles a mises dans le grand plat.

Combien de prunes Charles a-t-il mises dans chaque plat ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Répartir 117 en quatre nombres proportionnellement à 1, 2, 4 et 2.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les relations « double » et « moitié » sont inverses l'une de l'autre et que « le nombre de prunes du grand plat est le double de celui du plat moyen » signifie aussi que « le nombre de prunes du plat moyen est la moitié de celui du grand » et que par conséquent, le nombre de prunes du reste est le même que celui des prunes dans le plat moyen.
- Chercher 3 nombres, un petit, un moyen, double du petit, et un grand double du moyen, tels qu'en ajoutant un petit, deux moyens et un grand on trouve 117.
- Par essais, à partir du petit plat, écrire les quadruplets possibles : 1, 2, 4, 2 ; 2, 4, 8, 4 ; 3, 6, 12, 6 … et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 13, 26, 52, 26 pour satisfaire la condition que le total est 117.

Ou bien,

- Comprendre, éventuellement en ayant recours à un schéma, que le nombre total des prunes, 117, peut s'exprimer dans une même unité, le nombre de prunes du petit plat par exemple ce qui donne 1 unité pour le petit, 2 pour le moyen, 4 pour le grand et 2 pour le reste et en déduire que le nombre total d'unités est 9. Calculer ainsi la valeur d'une unité 117 : 9 = 13 dans le petit plat et donc 13 x 2 = 26 dans le plat moyen, et enfin 13 x 4 = 52 dans le grand plat.

Ou bien,

- Comprendre que le nombre total de prunes placées dans les trois plats est un nombre divisible par 7 et plus petit que 117 (112, 105, 98, 91, 84, …). Prenons par exemple 112, on peut obtenir la quantité de prunes dans chaque plat en procédant de la manière suivante : 112 : 7 = 16 (prunes dans le petit plat), 16 x 2 = 32 (prunes dans le plat moyen), 16 x 4 = 64 (prunes dans le grand plat). Cette solution n'est pas acceptable car il reste 5 prunes et (non pas 32) dans le plat moyen. Avec un nombre total dans les plats de 91 prunes, on a : 91 : 7 = 13 (dans le petit plat), 13 x 2 = 26 (dans le plat moyen), 13 x 4 = 52, (dans le grand plat) et 117 – 91 = 26 ; le nombre de prunes en dehors des plats est égal au nombre de prunes dans le plat moyen.

Ou bien,

- Algébriquement : poser et résoudre l'équation dont l'inconnue x est le nombre de prunes dans le petit plat : $x + 2x + 4x + 2x = 117$, d'où $x = 117/9 = 13$.

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Groupe opérations et proportionnalité, variante de *Les Châtaignes de Charles* (22.II.09).

12. LES ANNIVERSAIRES (Cat. 6, 7, 8)

Martine et son père Marc fêtent leur anniversaire le même jour. Cette année, en 2017, leurs âges s'écrivent avec les deux mêmes chiffres : Martine a 37 ans et Marc 73 ans.

Y a-t-il déjà eu d'autres anniversaires où leurs deux âges s'écrivaient avec les mêmes chiffres ? Et y en aura-t-il encore après 2017 ?

Donnez les deux âges de Martine et Marc pour chacun de ces autres anniversaires et expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les couples possibles de nombres à deux chiffres dans lequel le chiffre des dizaines de l'un correspond au chiffre des unités de l'autre et vice versa, donnant la même différence.

Analyse de la tâche

- L'appropriation du problème nécessite la compréhension que chaque année les âges changent et augmentent d'une unité, l'an prochain ils auront 38 et 74 ans, l'année suivante 39 et 75 ans et ainsi de suite ; que les âges avancent au même rythme dans le temps et que l'écart reste constant ; la différence des âges 73 – 37 = 36 reste toujours la même.
- On pourrait alors partir de 0 et 36 ou 10 et 46.
- On peut construire deux suites en relation du type :
    - Martine 0 3 4 **15 26 37 48 59** 70...81
    - Marc 36 39 40 **51 62 73 84 95**...106...117
- et ainsi trouver toutes les solutions.
- Il faut savoir limiter les deux suites : 64 et 100 (et au-delà) ne conviennent pas car ils ne remplissent pas la condition « nombres à deux chiffres » ; de même 09 et 45 (et en deçà).
- On peut aussi remarquer que, pour trouver tous les âges qui nous intéressent, on doit à chaque fois ajouter 11 à chaque nombre du couple (15, 51) : (26, 62) (37, 73) (48, 84) (59, 95).
- Ou alors commencer par la différence entre 73 et 37 = 36 ; chercher ensuite les nombres dont la différence entre les chiffres des unités est 6 (par exemple 11 – 5 = 6; 12 – 6 = 6 .; 13 – 7 = 6 ; 14 – 8 = 6 ; 15 – 9 = 6), puis en déduire que les chiffres des dizaines peuvent être obtenus par l'échange avec ceux des unités. Par exemple, de 14 – 8 = 6, voir que 84 et 48 conviennent.
- Ou exclure tous les âges de Martine plus petits que 10 ; essayer d'inverser les chiffres à partir de 12 et comprendre que la différence augmente toujours de 9, jusqu'à arriver à 15 et 51, où la différence est vraiment 36. Comprendre qu'au-delà du 15 la différence augmente. Passer à la dizaine suivante, en partant de 23 et trouver 26 et 62, dont la différence est 36. On comprend ici qu'il y a une régularité ; nous arrivons ainsi aux âges indiqués dans le texte, 37 et 73 ; les autres âges qui conviennent seront 48 et 84 et 59 et 95, parce qu'à chaque fois les âges augmentent de 11 (une dizaine plus une unité).
- Ou encore, en s'appuyant sur les caractéristiques de la numération décimale de position, poser que l'âge de Marc est de 10 a + b et que l'âge de Martine est alors de 10 b + a (a et b étant des nombres entiers entre 0 et 9, avec a > b (car Marc est plus âgé).
- On doit donc avoir 10 a + b = 10 b + a + 36, d'où 9 (a – b) = 36 et donc a – b = 4. Le cas b = 0 est exclu car on doit trouver des nombre à deux chiffres. On trouve donc b = 1 et a = 5 (15 ans et 51 ans), b = 2 et a = 6 (26 ans et 62 ans), b = 3 et a = 7 (exemple donné dans l'énoncé), b = 4 et a = 8 (48 ans et 84 ans), b = 5 et a = 9 (59 ans et 95 ans).

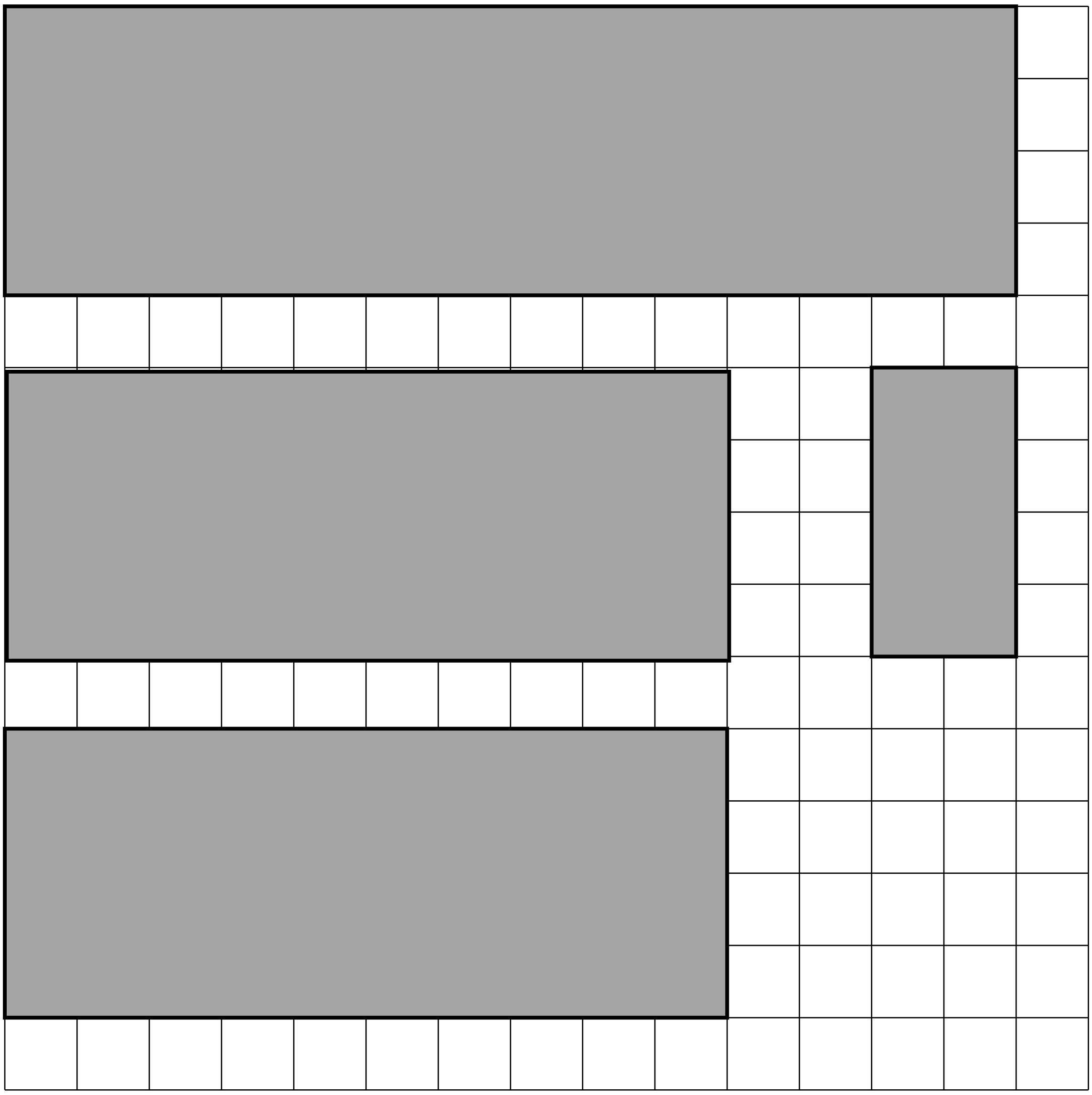
Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Riva del Garda (reprise des problèmes *Bougies*, 11RMT-F, cat. 5-6 ; *Anniversaires et bougies*, 16RMT-F, cat. 7-10)

13. UNE BOITE PARTICULIÈRE (Cat. 7, 8)

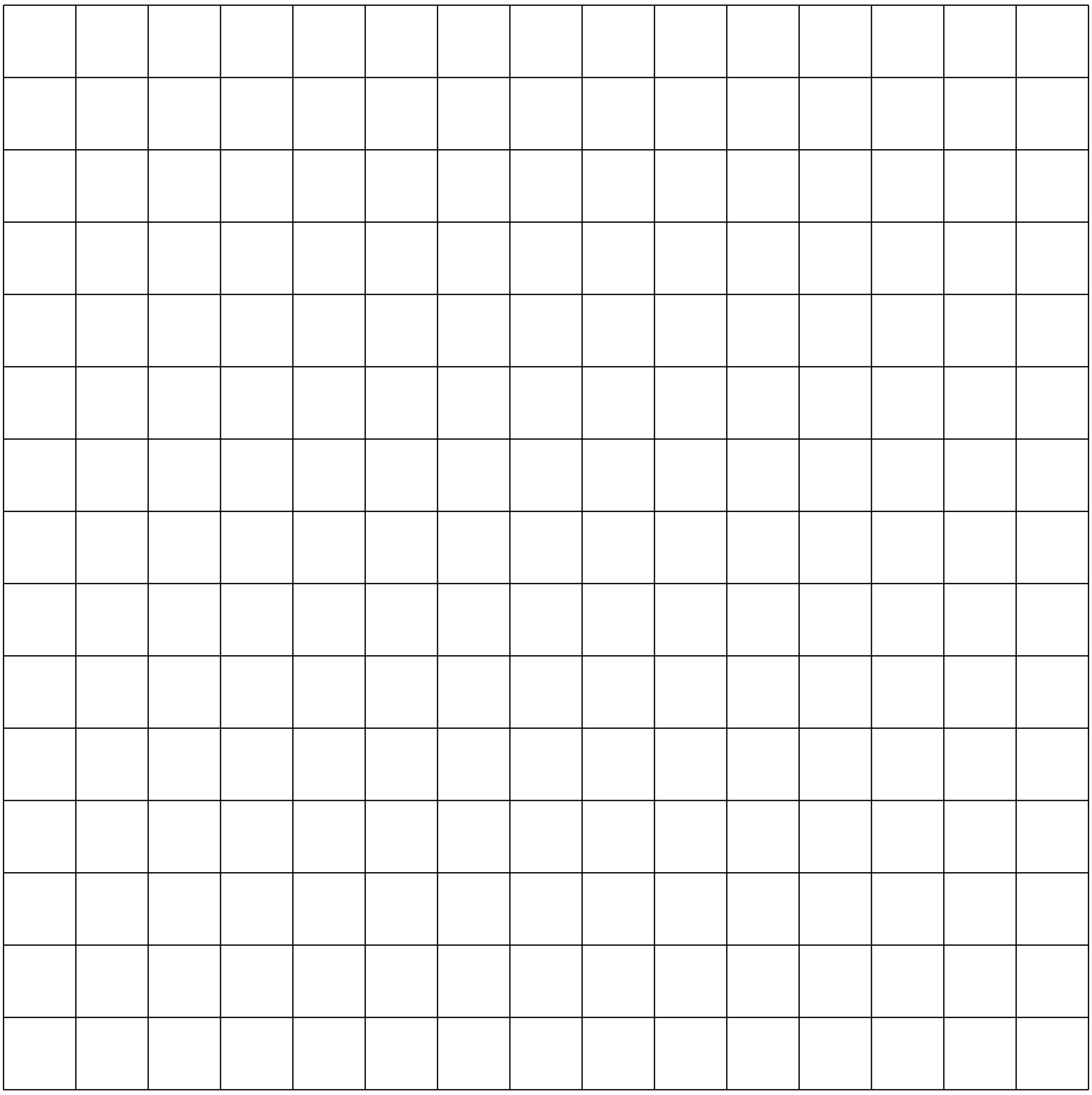
Jean veut construire une boîte à six faces. C'est une boîte de forme particulière qu'il veut utiliser pour faire un cadeau à sa sœur.

Pour la construire, il utilise les quatre faces dessinées ci-dessous et il veut en faire deux autres pour fermer la boîte. Il veut que chaque face qu'il n'a pas encore dessinée, ait un axe de symétrie.



Dessinez sur la feuille quadrillée qui suit les faces qui manquent pour compléter la boîte.

Expliquez comment vous les avez trouvées.



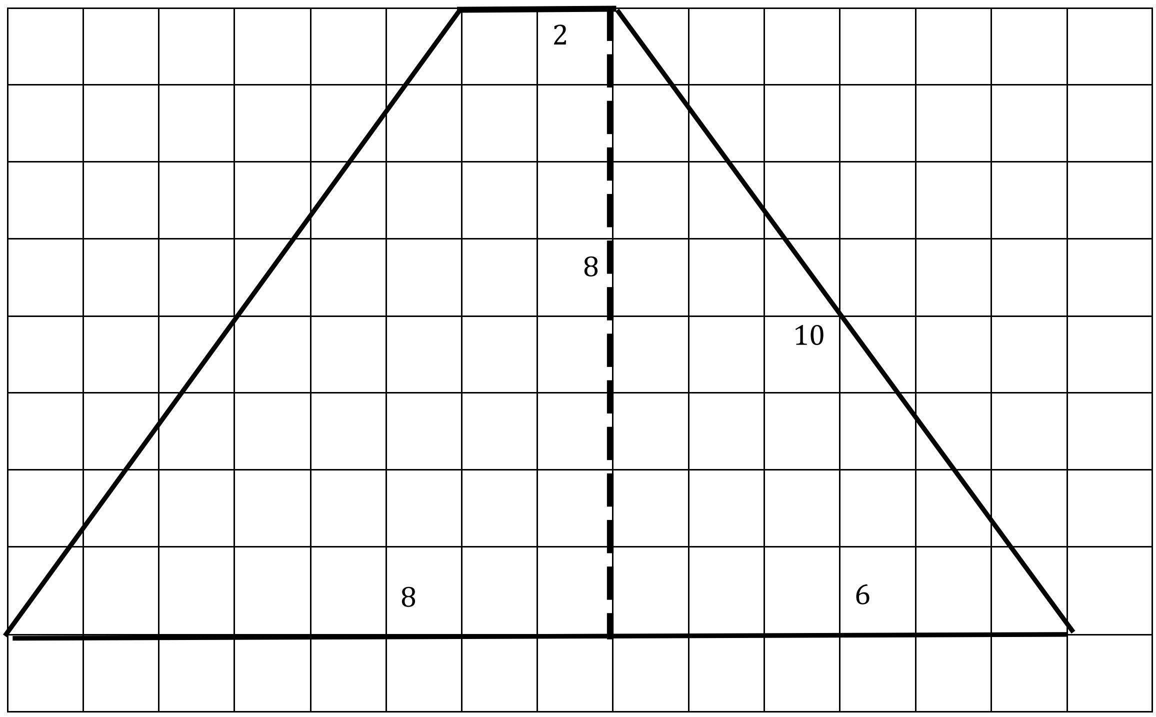
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconnaître à partir du dessin de 4 de ses faces rectangulaires, qu'un solide est un prisme droit. Dessiner ses deux autres faces sachant qu'elles ont un seul axe de symétrie.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut commencer en analysant les informations données par les mesures des quatre rectangles.
- Comprendre qu'à partir des quatre faces rectangulaires données, on peut construire un prisme droit.
- Comprendre que les faces données sont des faces latérales et que les deux faces à dessiner sont les deux bases identiques non rectangulaires.
- Remarquer que sur les quatre rectangles, deux ont des mesures totalement identiques et que les quatre rectangles ont une mesure commune.
- Faire des essais de positionnement des faces les unes par rapport aux autres : Essayer de mettre dans des plans parallèles les deux rectangles de mêmes dimensions et constater que les deux faces déjà dessinées ne s'adaptent pas à cette disposition. En déduire qu'ainsi on ne peut pas construire le solide recherché.
- Comprendre qu'il est possible de positionner les faces données les unes au bout des autres en utilisant leur mesure commune et comprendre en refermant la construction que les faces manquantes seront les bases d'un prisme droit.
- Réorganiser le positionnement des faces données pour que les faces manquantes aient un axe de symétrie
- Reconnaître que les bases seront donc des trapèzes isocèles dont les dimensions se déduisent des dimensions des rectangles déjà donnés
- Construire les figures en respectant les mesures
- En construisant un triangle rectangle à l'intérieur du trapèze, on vérifie avec la relation de Pythagore 6, 8, 10 que la hauteur du trapèze sera de 8 côtés de carreaux, le côté oblique de 10 et que la grande base du trapèze mesure 6 + 2 + 6



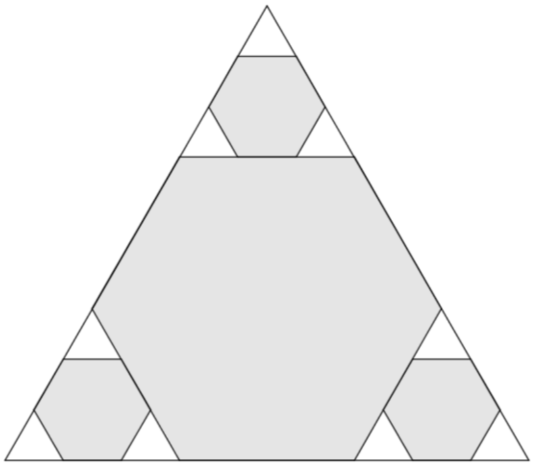
Niveaux : 7, 8

Origine : Groupe géométrie dans l'espace

14. LE PLATEAU TRIANGULAIRE (Cat. 7, 8)

Un plateau en bois a la forme d'un triangle équilatéral.

Sa surface est composée de parties en bois sombre et de parties en bois clair. Les parties en bois sombre sont des hexagones réguliers et les parties en bois clair sont des triangles, comme le montre la figure.



Joseph s’est amusé à calculer l’aire du grand hexagone qui vaut 4158 cm^2 et il voudrait maintenant calculer l'aire des petits hexagones.

Quelle est, en cm^2, l’aire totale des trois petits hexagones ?

Expliquez comment vous l’avez trouvée.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l’aire de trois petits hexagones réguliers superposables, connaissant l’aire d'un hexagone régulier dont la longueur des côtés est le triple de celle des côtés des petits hexagones. Tous les hexagones sont inscrits dans un triangle équilatéral.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que les trois petits triangles ayant un côté commun avec un côté de l'hexagone sont équilatéraux et égaux (par exemple, observer que chacun d'eux a trois angles égaux : les côtés de l'hexagone régulier sont parallèles aux côtés du grand triangle, et par conséquent les angles d'un petit triangle sont égaux à ceux du grand triangle équilatéral ; on peut aussi les considérer comme supplémentaires aux angles des hexagones réguliers qui valent 120° chacun).
- La longueur des côtés du grand hexagone est donc le tiers de celle des côtés du grand triangle.
- Le grand triangle peut être divisé en 9 triangles équilatéraux égaux (6 formés à partir du centre de l'hexagone et 3 dans la partie restante).
- Connaissant l’aire de l’hexagone, il est donc possible de calculer l’aire d’un de ces triangles : 4158 : 6 = 693 cm^2.
- De même, chacun de ces triangles peut être divisé en 9 petits triangles dont 6 inclus dans un petit hexagone : 693 : 9 = 77 cm^2.
- L’aire d'un petit hexagone est donc 77 × 6 = 462 cm^2. L’aire totale des trois petits hexagones mesure donc : 462 × 3 = 1386 cm^2.

Ou bien,

- observer que chacun des 9 triangles peut être considéré comme composé de 9 petits triangles égaux entre eux. Ainsi, l’hexagone est formé de 54 triangles d’aire 4158 : 54 = 77 cm^2. Un petit hexagone a donc une aire de 77 × 6 = 462 cm^2. L’aire totale des trois petits hexagones vaut donc 462 × 3 = 1386 cm^2.

Ou bien,

- se rendre compte que l'on peut placer 7 hexagones dans le grand et qu'il reste 12 petits triangles équilatéraux qui forment 2 hexagones de plus. L'aire du grand hexagone est donc égale à celle de 9 petits, ce qui implique qu'un petit hexagone a une aire de 462 cm² (4158/9). Il reste à multiplier ce nombre par 3 pour obtenir la réponse.

Ou bien,

- considérer que la longueur des côtés des petits hexagones est le tiers de celle des côtés du grand hexagone, l'aire d'un petit hexagone est donc égale à $(1/3)^2 = 1/9$ de l'aire de ce grand hexagone, soit 1/9 de 4158, donc 462 cm^2. Les trois petits hexagones auront donc une aire totale mesurant $462 \times 3 = 1386$ cm^2.

Ou bien,

- Il est possible trouver le résultat exact (1386 cm2) à partir de la formule de l'aire de l'hexagone faisant intervenir des radicaux qui peuvent conduire à des valeurs approchées (par ex. 1385 cm2) s'ils sont remplacés par des approximations décimales.

Niveaux : 7, 8

Origine : Puglia

15. SAC DE HARICOTS (Cat. 8)

Marc demande à son ami Charles le nombre exact de haricots contenus dans un grand sac, sachant que :

- le nombre cherché est compris entre 1400 et 1700 ;
- si on regroupe les haricots par 2 il en reste un ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 3, il n'en reste pas ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 7, il reste 5 haricots.

Quel est le nombre de haricots contenus dans le grand sac ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'unique nombre compris entre 1400 et 1700, quand les restes des divisions de ce nombre par 2, 3, 5 et 7 sont respectivement 1, 0, 2 et 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que s'agissant d'un grand nombre, il n'est pas possible de travailler avec des objets ou des dessins. Il est nécessaire d'utiliser l'écriture des nombres dans des relations numériques.
- Trouver une méthode d'élimination ou de choix qui évite de faire trop de divisions pour déterminer les restes.
- La recherche doit être faite sur tous les nombres compris entre 1400 et 1700, en éliminant successivement :
- - ceux qui se terminent par un chiffre pair (0, 2, 4, 6, 8) pour respecter la deuxième condition,
- - ceux qui ne sont pas divisibles par 3 pour respecter la troisième condition,
- - ceux qui ne se terminent pas par 7 pour respecter la quatrième condition (le chiffre des unités d'un multiple de 5 moins 3 est 7 ou 2, qui est à éliminer d'après la deuxième condition).
- Arrivé à ce point, il reste à écrire tous les nombres impairs compris entre 1400 et 1700 qui se terminent par le chiffre 7 et qui sont multiples de 3. On peut réduire l'ensemble des nombres à examiner pour trouver les multiples de 3 (si d et c désignent les chiffres des dizaines et des unités du nombre cherché : $1 + c + d + 7$ est multiple de 3 avec $c + d \leq 18$). On obtient : 1407, 1437, 1467, 1497, 1527, 1557, 1587, 1617, 1647, 1677.
- Trouver enfin que le nombre 1587 est le seul qui réponde aux cinq conditions : $(226 \times 7) + 5 = 1587$.

Ou bien

- écrire tous les multiples de 7 augmentés de 5 entre 1400 et 1700, éliminer les nombres pairs et conserver seulement ceux qui finissent par 7 (1447, 1517, 1587, 1657) pour arriver à conserver seulement 1587, qui est l'unique nombre multiple de 3.

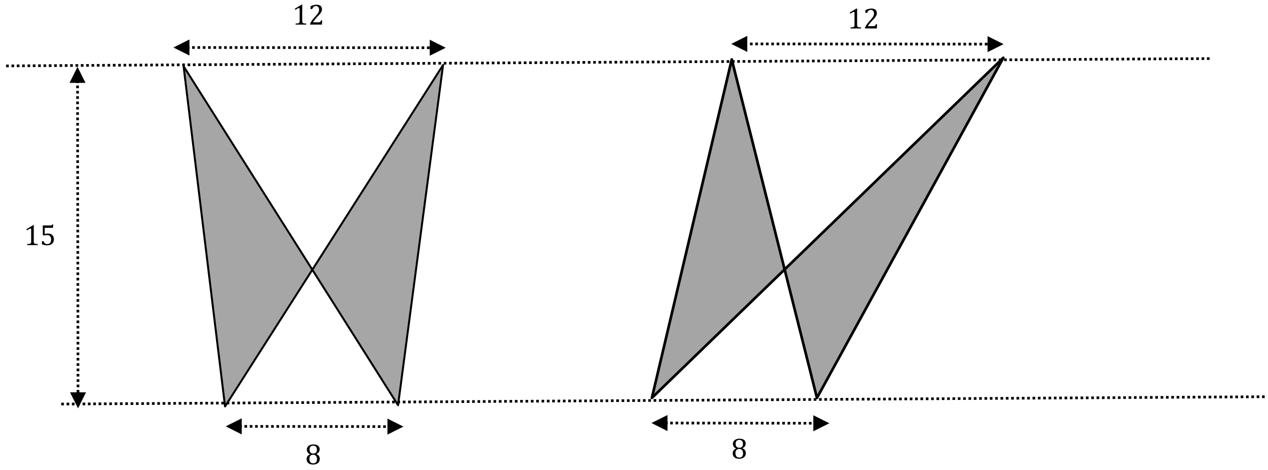
Niveaux : 8

Origine : Riva del Garda et *Le sachet de billes*, cat. 7, 8, 10.II.13

16. MADAME PAPILLON (Cat. 8)

Madame Papillon est fière de ses grandes ailes symétriques.

Hier, cependant, à cause d'un fort coup de vent, ses ailes ont été déformées, comme on le voit dans la figure de droite ci-dessous.



\- (les mesures sont en cm)

Selon vous, le coup de vent a-t-il modifié l'aire des ailes ?

Justifiez votre réponse et calculez les aires des ailes avant et après le coup de vent.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconnaître les triangles formés par les côtés et les diagonales de trapèzes dont les mesures des bases (8 et 12) et de la hauteur (15) sont données, calculer leurs aires et constater qu'elles sont indépendantes de la valeur des angles du trapèze.

Analyse de la tâche

- Pour chacune des deux figures, remarquer que les triangles formés par une aile grise et un petit triangle blanc ont une base de 8 cm et la hauteur correspondante de 15 cm, ils ont donc la même aire. En déduire que dans chaque figure, les deux ailes grises ont la même aire. Il reste à les comparer d'une figure à l'autre. On peut aussi travailler avec le grand triangle blanc.

Méthode expérimentale

- Reproduire sur une feuille de papier quadrillée les deux figures du papillon et les deux droites parallèles en utilisant les mesures données, 15, 12 et 8, en côtés de carreau. Se rendre compte expérimentalement que pour chaque papillon, les deux ailes se coupent en un point qui est à 6 côtés de carreau de la droite du bas et 9 côtés de celle du haut.
- Vérifier que des telles valeurs sont correctes en calculant l'aire des deux ailes d'un même papillon, on trouve la même valeur (36 carreaux), d'abord en partant de l'aire du triangle formé d'une aile et du petit triangle blanc et en enlevant l'aire de ce dernier, ensuite en partant de l'aire du triangle formé d'une aile et du grand triangle blanc et en enlevant l'aire de ce dernier. En déduire que le coup de vent n'a pas changé les aires des ailes.

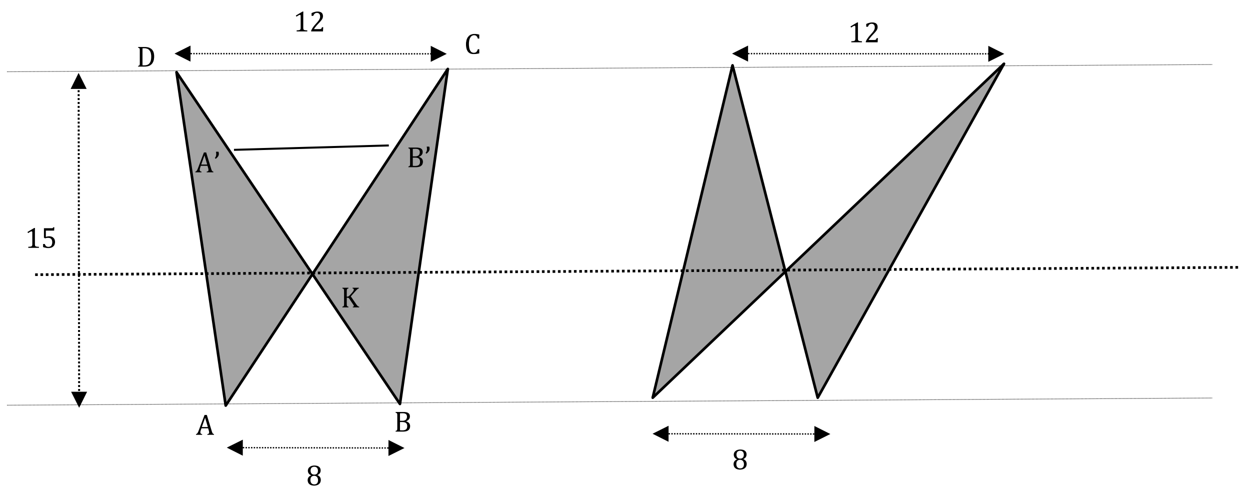
Observation : des mesures prises directement sur les figures données dans l'énoncé ne peuvent pas aboutir au calcul de l'aire des ailes ni à la conclusion que les aires des triangles gris sont les mêmes, à cause des approximations inévitables.

Méthode algébrique pour le calcul de l'aire d'une aile

- Remarquer que les ailes de Madame Papillon sont inscrites dans deux trapèzes de bases 12 cm et 8 cm et de hauteur 15 cm et donc de même aire ($A = (12+8)\times 15/2 = 150$ cm^2).
- Quelle que soit la figure considérée, on note a l'aire d'une des deux ailes, h la hauteur du petit triangle blanc, H celle du grand triangle blanc, et A l'aire du trapèze. Pour les deux figures, on a les relations : $H + h = 15$; $A = 2a + 4h + 6H$ et $a = 4\times 15 - 4h$. On en déduit l'équation en h : $8\times 15 - 8h + 4h + 6(15 - h) = 150$, d'où $h = 6$.
- Pour les deux figures, l'aire d'une aile est donc égale à $4\times 15 - 4\times 6 = 36$ cm^2. Le coup de vent n'a pas changé les aires des ailes.

Méthode géométrique pour le calcul de l'aire d'une aile

- Après avoir montré que pour chaque papillon les deux ailes ont la même aire, travailler sur la figure de gauche et observer que la diagonale AC (ou de manière analogue, la diagonale BD) divise le trapèze ABCD en deux triangles (ACB et ACD). ACB a pour aire $8\times 15/2 = 60$ cm^2 et ACD a pour aire $12\times 15/2 = 90$ cm^2.
- Puisque chacun de ces triangles est formé d'un triangle gris et d'un blanc et que les triangles gris sont de même aire, la différence entre les aires (30 cm^2) est due à la différence entre les aires des triangles blancs.



- Soit B'KA' le triangle symétrique de AKB par rapport à K. L'aire du trapèze A'B'CD est donc égale à la différence des aires des triangles AKB et DKC. La hauteur de ce trapèze est $h = 30\times2/(12+8) = 3$ cm. La hauteur du triangle AKB est par conséquent égale à $(15–3)/2 = 6$ cm et celle du triangle DKC est égale à 9 cm.
- On peut donc calculer l'aire des ailes du papillon (36 cm^2 chacune) par exemple par différence entre l'aire du triangle DAB $(15\times8/2)$ et celle du petit triangle blanc KAB $(6\times8/2)$.
  Eventuellement, considérer la droite passant par les points communs aux ailes de chaque papillon et faire l'hypothèse qu'elle est parallèle aux droites contenant les bases des triangles blancs (Voir figure ci-dessus) Comprendre alors que les petits triangles blancs sur les deux figures ont la même aire, puisqu'ils ont leurs bases de même longueur (8 cm) et la même hauteur. Idem pour les grands triangles blancs. Comme les triangles formés par une aile grise et un petit triangle blanc ont la même aire, on en déduit que les 4 ailes dessinées sur les deux figures ont la même aire et que le coup de vent n'a pas modifié l'aire des ailes de Madame Papillon.

Ou bien (solutions expertes)
- Observer que, dans la figure de gauche comme dans celle de droite, les deux triangles blancs sont semblables (angles égaux chacun à chacun) ou homothétiques (le centre d'homothétie est le sommet commun des triangles gris) dont le rapport est égal à celui leurs bases (qui sont de mêmes longueurs dans les deux figures) : $8/12 = 2/3$. Leurs hauteurs sont donc aussi dans le même rapport, 2/3. La distance entre les deux bases, 15 cm, est la somme de la hauteur du grand triangle blanc et de celle du petit triangle blanc, qui vaut 2/3 de celle du grand, soit $1 + 2/3 = 5/3$ de la hauteur du grand triangle blanc. On peut donc en déduire les deux hauteurs des triangles blancs : celle du grand $15 : 5/3 = 9$ cm et celle du petit $15 : 5/2 = 6$ cm.
- Ou par le théorème de Thalès, en posant x = hauteur du petit triangle blanc et $15 – x$ = hauteur du grand triangle blanc, on obtient l'équation : $(15 – x)/x = 12/8$ pour trouver $x = 6$ cm.
- L'aire des triangles blancs est donc, pour le grand : $(12 \times 9)/2 = 54$ cm^2, et pour le petit $(8 \times 6)/2 = 24$ cm^2.
- Finalement, calculer l'aire des triangles gris, qui est la même dans la figure symétrique comme dans l'autre, pour chacune des quatre ailes de la figure. Par exemple, partant du triangle formé du petit triangle blanc et d'un triangle gris, on trouve : $(8 \times 15)/ 2 – 24 = 36$ cm^2.

Niveaux : 8

Origine : Groupe géométrie plane