Titre	Catégories	Thèmes	Origine
1. Le collier de Paola	3	Arithmétique : somme, moitié	SI
2. Les collectionneurs	3 4	Déduction, Relation d'ordre	SI
3. Mathématiques dans la salle de gymnastique	3 4	Arithmétique : répétition de séquence, division	SI
4. Cherchez la petite bête	3 4 5	Arithmétique, équations	BB
5. Le pâtissier	3 4 5	Déduction	13e RMT-I
6. Pyramides	4 5	Géométrie : empilements, arithmétique	SI
7. Le carré change de forme (1)	4 5	Géométrie : agencement de formes, isométrie	SI
8. Les allumettes	5 6	Périmètre	BB
9. Huit triangles dans un carré	5 6	Géométrie : partage en triangles identiques	fj, RZ
10. Les chocolats de Zoé	5 6 7	Aritmétique : nombres avec 5 diviseurs	BB
11. Dates particulières	6 7	Aritmétique	SI
12. Collection de cartes postales	6 7 8	Aritmétique : division euclidienne	PU
13. Pyramides bicolores	6 7 8	Géométrie : empilements, arithmétique	SI
14. Le carré change de forme (2)	6 7 8	Géométrie : agencement de formes, isométrie	SI
15. Carrés magiques multiplicatifs	7 8	Arithmétique: produits de puissances de 2	AO
16. Triangles étrangers	7 8	Géométrie: triangles de même périmètre	SR
17. Soupe en promotion	8	Géométrie 3D, pourcentages	FC
18. Le tapis roulant	8	Vitesse, espace, temps	FC

1. LE COLLIER DE PAOLA (Cat. 3)

Paola a un collier qui est fait avec 24 perles rouges.

Elle veut faire un collier plus grand en utilisant ces 24 perles rouges et en ajoutant d'autres perles rouges et des perles jaunes.

Elle ajoute le même nombre de perles rouges que de perles jaunes. Son nouveau collier a en tout 50 perles.

Combien y a-t-il de perles rouges dans le nouveau collier de Paola ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer la somme de 24 et de la moitié du complément de 24 à 50.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation évoquée de dénombrement de perles de deux types dans la recomposition d'un collier.
- Appui sur une procédure figurative :
  Dessiner les 24 perles rouges du collier initial et ajouter simultanément une perle rouge et une perle jaune en comptabilisant à chaque ajout le nombre total de perles dessinées (comptage de 1 en 1 ou de 2 en 2 à partir de 24 ou addition de 1 ou 2) jusqu'à arriver à 50 perles.
  Dénombrer les perles rouges ajoutées, ajouter ce nombre à 24 pour trouver le nombre de perles rouges du nouveau collier.

Ou

- procédure non figurative utilisant un surcomptage :
  Ajouter des 2 ou compter de 2 en 2 à partir de 24 jusqu'à arriver à 50. Compter le nombre de 2 ajoutés, ce qui donne le nombre de perles rouges ajoutées (13). Ajouter ce nombre à 24 pour trouver le nombre de perles rouges du nouveau collier.

Ou

- procédure arithmétique :
  Déterminer le complément de 24 à 50 (26) pour avoir le nombre de perles ajoutées puis la moitié de 26 pour avoir le nombre de pièces rouges ajoutées (13). Terminer en ajoutant 13 à 24 pour trouver 37.

Niveau : 3

Origine: Sienne (d'après 11e RMT, Epreuve 1, problème 6)

2. LES COLLECTIONNEURS (Cat. 3, 4)

Claude, André, Jacques, Thibault et Lise collectionnent des voitures miniatures.

André et Jacques ont à eux deux autant de voitures que Claude.

Thibault a moins de voitures que Jacques, mais ce n'est pas lui qui en a le moins de tous.

Lise a deux voitures de plus que Claude.

Ecrivez les prénoms des enfants dans l'ordre, de celui qui a le moins de voitures à celui qui en a le plus.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Ordonner cinq nombres inconnus à partir d'informations données sur l'ordre de certains de ces nombres et de relations additives qui les lient.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faudra ordonner les cinq personnages selon le nombre de voitures qu'ils possèdent, selon les conditions données.
- Comprendre que les relations additives qui lient deux nombres ne sont données que pour informer de l'ordre dans lequel ils sont rangés. Interpréter la première condition en comprenant que si le nombre de voitures de Claude est la somme des nombres de voitures de André et Jacques, ces deux derniers sont inférieurs au premier.
- Trier et organiser les informations pour en déduire l'ordre dans lequel les cinq nombres inconnus vont se ranger.

Des stratégies possibles :

- Faire une hypothèse sur le nombre de voitures que possède chaque enfant. Par exemple à partir de la première condition fixer : André 2, Jacques 4 et Claude 6. La seconde information dit que Thibault en a moins de Jacques, mais plus qu'André, alors il pourrait en avoir 3. De la dernière information déduire que Lise aurait 8 voitures. Selon l'hypothèse faite au départ, cette stratégie peut donner lieu à des essais longs et fastidieux.

  Remarque : Dans le même ordre d'idée, l'hypothèse initiale pourrait être Jacques 2, André 4 et Claude 6. Mais cela conduirait à Thibault 1 ce qui est contradictoire avec le fait que ce n'est pas Thibault qui en a le moins de tous.

Ou

- Faire le choix d'une information pour ordonner deux personnages, puis en utiliser une autre pour tenter de ranger les autres personnages par rapport à ceux déjà ordonnés. Pour cela utiliser une représentation schématique (étiquettes avec les prénoms, dessins, ligne orientée, flèches…) et placer les prénoms les uns par rapport aux autres au fur et à mesure du traitement des informations données.

  Par exemple :
  Commencer par la première condition pour déterminer que Claude est avant André et Jacques (il reste une incertitude sur les positions relatives de André et Jacques) ;
  Utiliser la troisième condition pour placer Lise avant Claude (sans effet sur les deux autres qui suivent) ;
  La deuxième condition permet de lever l'incertitude sur André et Jacques en plaçant Thibault après Jacques et avant André.

- Une fois terminé, contrôler que l'ordre trouvé pour les cinq enfants est compatible avec toutes les informations de l'énoncé.

Niveaux : 3, 4

Origine : Sienne

3. MATHÉMATIQUES DANS LA SALLE DE GYMNASTIQUE (Cat. 3, 4)

Dans la salle de gymnastique, Marc suit un parcours avec un ballon qu'il fait rebondir sur le sol et qu'il lance en l'air.

Il commence par quatre rebonds du ballon sur le sol suivis d'un lancer en l'air. Il continue de la même façon, quatre rebonds puis un lancer, jusqu'à la fin du parcours.

Luc compte le nombre de rebonds et de lancers de Marc sur tout le parcours. Il y en a 87 en tout.

Combien de rebonds sur le sol a fait le ballon de Marc ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Exploiter la régularité d'une séquence de deux évènements d'amplitude 5 pour déterminer le nombre de fois où se produit l'un des deux évènements connaissant le nombre total d'évènements.

Analyse de la tâche

- Comprendre que 87 correspond à la succession à l'identique d'une combinaison de rebonds sur le sol et de lancers en l'air et qu'il s'agit de répartir ces 87 évènements en rebonds et lancers.
- Effectuer une représentation figurative ou schématique de la totalité des rebonds et lancers, et dénombrer les rebonds.

Ou

- Déterminer la longueur d'une séquence (5 évènements correspondant chacun à 4 rebonds et 1 lancer) et chercher le nombre de séquences de 5 évènements contenues dans 87, soit par comptage de 5 en 5, addition de 5, essais multiplicatifs ou multiplication à trou. Interpréter le comptage ou les calculs effectués pour déterminer le nombre de séquences (17) et le nombre d'évènements (85). Calculer le nombre de rebonds contenus dans ces 17 séquences (17 x 4 = 68) et comprendre que les deux évènements manquant pour atteindre 87 sont deux rebonds, ce qui représente un total de 70 rebonds.

  Selon la procédure numérique utilisée, les élèves peuvent faire des erreurs de comptage ou de calcul et d'interprétation de ceux-ci. Ils peuvent également oublier le complément à 87 ou ne pas savoir l'interpréter.

Ou

- Combiner les deux stratégies : commencer par une procédure figurative ou schématique, prendre conscience de la régularité de la séquence de 5 évènements et engager ensuite une procédure numérique. Le recours dans un premier temps au dessin peut aider ensuite à l'interprétation des calculs.

Niveaux: 3, 4

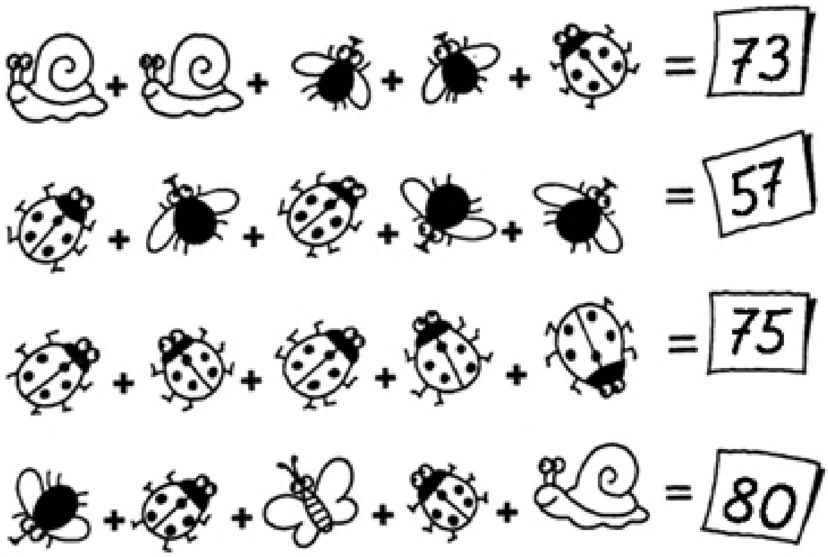
Origine: Sienne

4. CHERCHEZ LA PETITE BÊTE (Cat. 3, 4, 5)

Voici des additions très étranges.

Les nombres ont été remplacés par des petites bêtes : un escargot, une mouche, une coccinelle et un papillon.

Chaque petite bête remplace toujours le même nombre.



Trouvez à quel nombre correspond chaque petite bête.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres qui sont les termes de quatre sommes, chaque somme étant composée de cinq termes

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque petite bête dessinée représente toujours le même nombre.
- Procéder par déduction :
  - Observer les dessins et comprendre qu'il faut commencer par la ligne 3 où figurent seulement 5 coccinelles et déduire la valeur d'une coccinelle : 75 / 5 = 15 ou 5 x 15 =75 ;
  - Poursuivre par la ligne 2 et remplacer les 2 coccinelles par leur valeur (15 x 2 = 30) ; en déduire que 3 mouches valent 27 (57 – 30 = 27) et qu'une mouche vaut 9 (27 / 3 = 9 ou 3 x 9 = 27) ;
  - Poursuivre par la ligne 1 et remplacer la coccinelle et la mouche par leur valeur ((2 x 9) + 15 = 33) ; en déduire la valeur de deux escargots (73 – 33 = 40) et la valeur d'un seul (40 / 2 = 20 ou 2 x 20 = 40) ;
  - Terminer par la ligne 4 et remplacer la mouche, les deux coccinelles et l'escargot par leur valeur (9 + (2 x 15) + 20 = 59) ; en déduire la valeur d'un papillon (80 – 59 = 21).

Ou

- Utiliser une procédure mixte faite de déductions partielles et d'essais, par exemple en commençant par trouver la valeur à donner à une coccinelle à partir de la troisième égalité…

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Bourg en Bresse

5. LE PÂTISSIER (Cat. 3, 4, 5)

Un pâtissier a préparé cinq gâteaux pour cinq de ses clients : Anne, Brice, Carla, Dany et Elise.

Voici les 5 gâteaux :
➢ un gâteau aux pommes et à la crème
➢ un gâteau aux fraises et à la crème
➢ un gâteau aux pommes sans crème
➢ un gâteau aux fraises sans crème
➢ un gâteau au chocolat.

Malheureusement, le pâtissier ne se souvient plus de ce que chaque client a commandé. Il se souvient cependant que :
• Anne achète seulement des gâteaux dans lesquels il y a fruits ;
• Carla et Dany veulent toujours des gâteaux aux fraises ;
• Elise et Carla n'aiment ni les gâteaux à la crème ni les gâteaux au chocolat.

Retrouvez le gâteau commandé par chaque client.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Mettre en relation univoque 5 objets et 5 personnes, à partir d'indications données sous forme affirmative ou sous forme négative.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les informations données permettent ou interdisent certaines associations.
- Procéder par déductions, par exemple :
  Anne peut avoir tous les gâteaux sauf le gâteau au chocolat ;
  Carla et Dany ne peuvent avoir que les 2 gâteaux aux fraises, ce qui fait que les autres clients ne peuvent pas les avoir ;
  Carla ne peut avoir que le gâteau sans crème aux fraises, donc Dany aura le gâteau à la crème et aux fraises
  Elise ne peut avoir que le gâteau sans crème aux pommes (le gâteau sans crème à la fraise étant déjà attribué à Dany) ;
  Pour Anna, il ne reste alors que le gâteau à la crème et aux pommes ;
  Et pour Brice, il ne reste que le gâteau au chocolat (ce gâteau aurait d'ailleurs pu lui être attribué dès le départ compte tenu des informations sur les autres clients).

Ou

- Procéder par essais et déductions, en attribuant un ou plusieurs gâteaux à un ou des clients et en vérifiant la compatibilité avec les informations données.

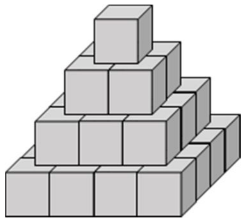
Remarque : Une solution utilisant un tableau est envisageable, mais très peu probable à ce niveau de la scolarité.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Sienne, d'après 13.I.3

6. PYRAMIDES (Cat. 4, 5)

Alexandre possède un grand nombre de cubes gris avec lesquels il construit des tours ayant la forme de pyramides, comme celle que vous voyez sur le dessin.



Les règles de construction qu'il utilise sont les suivantes :

- Le dernier étage de la tour est formé d'un seul cube ;
- Chaque étage a la forme d'un carré, sans vide entre les cubes.

Aujourd'hui, Alexandre a utilisé 204 cubes gris pour construire sa tour.

Combien d'étages a sa tour ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

Trouver les carrés des premiers nombres entiers naturels et en faire la somme pour obtenir 204.

Analyse de la tâche

- Interpréter correctement l'image. Comprendre que pour certains cubes on voit trois faces, pour d'autres deux faces, pour d'autres encore une face et qu'il y a des cubes qu'on ne voit pas. Comprendre que chaque étage est formé (à l'exception du dernier) par des cubes assemblés les uns contre les autres de manière à former un carré. Comprendre que le nombre de cubes sur le côté de chaque étage augmente de un quand on passe d'un étage à l'étage immédiatement inférieur.
- Comprendre que pour trouver le nombre de cubes utilisés pour chaque étage, il faut multiplier le nombre de cubes placés sur un côté de l'étage par lui-même.
- Pour trouver le nombre d'étages de la pyramide, procéder par essais : par exemple commencer avec une base de 6 x 6. Puis ajouter 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91 et remarquer qu'on n'a pas utilisé assez de cubes. Ajouter un étage 7 x 7 = 49 et réaliser que ça ne suffit toujours pas ; ajouter encore 8 x 8 = 64 et constater qu'alors on a utilisé 204 cubes. Conclure que la tour a huit étages.

Ou, retirer progressivement de 204 les nombres de cubes utilisés pour chaque étage en commençant par l'étage supérieur jusqu'au 8e niveau et constater alors que tous les cubes ont été utilisés : 204 – 1 = 203 ; 203 – 4 = 199 ; 199 – 9 = 190 … 113 – 49 = 64 ; 64 – 64 = 0

Ou, comprendre comment calculer le nombre de cubes à chaque étage et procéder à partir du haut vers le bas, et additionner pour atteindre le total de 204 cubes :

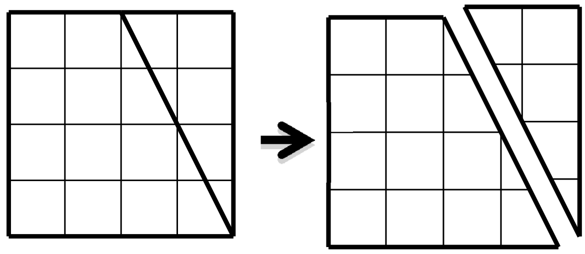
1 + 4 = 5; 5 + 9 = 14; 14 + 16 = 30; 30 + 25 = 55; 55 + 36 = 91; 91 + 49 = 140; 140 + 64 = 204.

Niveaux : 4, 5

Origine : Sienne

7. LE CARRÉ CHANGE DE FORME (I) (Cat. 4, 5)

Carlo a tracé un segment à l'intérieur d'un carré de 4 carreaux de côté et il a découpé le carré le long de ce segment.



Carlo a ensuite cherché à construire d'autres figures en assemblant les deux pièces obtenues en respectant cette règle :
Les deux pièces doivent être assemblées en faisant coïncider deux côtés de même longueur.

Voici deux des figures qu'on peut obtenir.
Pour construire la figure B, la pièce triangulaire a été retournée

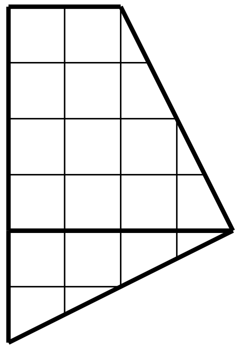


Figure A

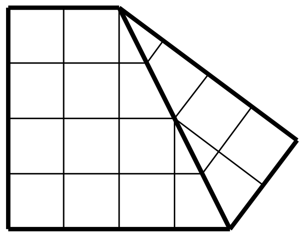


Figure B

Et voici deux exemples de figures qui ne conviennent pas.

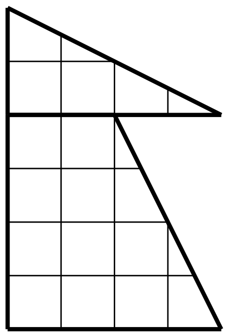


Figure C

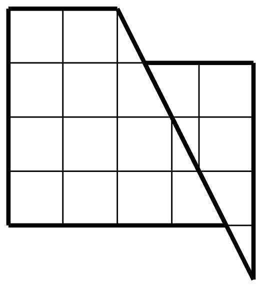
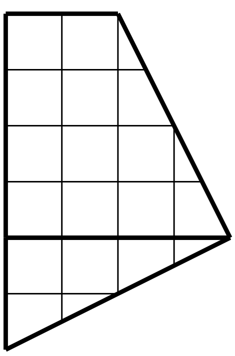
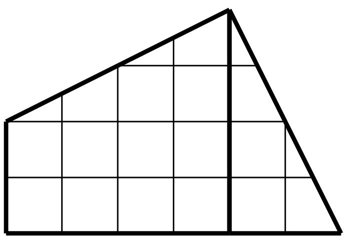


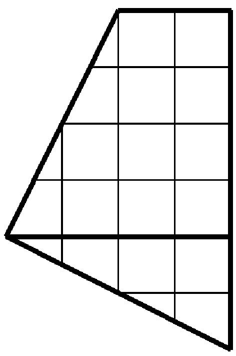
Figure D

Voici un exemple d'une même figure placée dans trois positions différentes





La figure a été tournée



La figure a été retournée

Une figure est différente d'une autre s'il n'est pas possible de la superposer à l'autre en la tournant ou en la retournant.

Cherchez toutes les figures différentes, autres que le carré et que les figures A et B, qu'on peut obtenir en assemblant les deux pièces et en respectant la règle d'assemblage.

Collez ou dessinez les figures que vous obtenez, autres que les figures A et B,.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

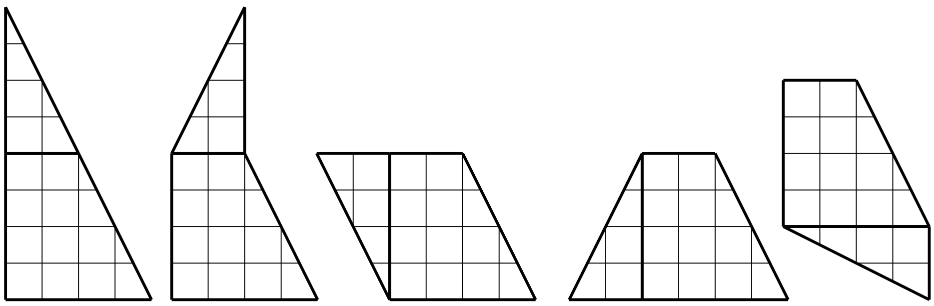
Trouver tous les polygones qu'il est possible d'obtenir en assemblant par des côtés de même longueur les deux polygones obtenus à partir du partage d'un carré en deux.

Analyse de la tâche

- Comprendre la contrainte (assemblage par deux côtés de même longueur et qu'on fait coïncider).
- Savoir reconnaître une même figure dans des orientations différentes ou retournée.

Stratégies possibles :

- Essais non organisés d'assemblages des deux pièces. La difficulté consiste alors à différencier une nouvelle figure d'une figure déjà construite et de les trouver toutes.
- Recherche méthodique :
  Repérage sur chacune des pièces des côtés qu'on peut faire coïncider,
  L'hypoténuse du triangle rectangle ne peut être rattachée au trapèze que par son côté oblique ;
  Le petit côté de l'angle droit du triangle rectangle ne peut être rattaché au trapèze que par sa petite base
  Le grand côté de l'angle droit du triangle rectangle peut être rattaché au trapèze par deux de ses côtés.
  Pour chaque paire de côtés qui peuvent coïncider, réalisation de l'assemblage avec les deux pièces côté recto et de l'assemblage avec une pièce recto et l'autre verso.
  Retirer des figures construites les figures A et B.
- Les cinq solutions autres que les figures A et B :



Niveaux : 4, 5

Origine : Sienne

8. ALLUMETTES (Cat. 5, 6)

Eliott a quatre carrés en carton tous identiques et une boite d'allumettes.

Il colorie le premier en gris (figure A) et colle 16 allumettes le long des côtés, sans en couper ou en superposer une seule. Les 16 allumettes forment parfaitement le pourtour du carré.

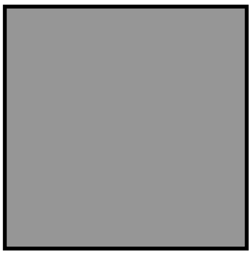


Figure A

Puis, dans les autres carrés, Eliott dessine trois figures grises comme sur les dessins ci-dessous. Il choisit les longueurs des côtés des figures grises de façon à pouvoir coller des allumettes tout autour de chaque figure sans couper une seule allumette ou en superposer deux.

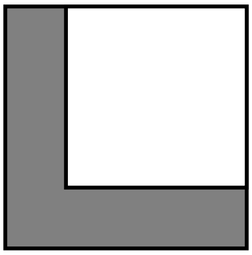


Figure B

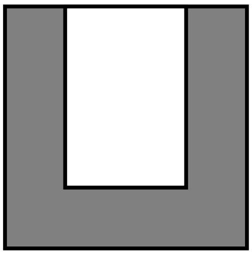


Figure C

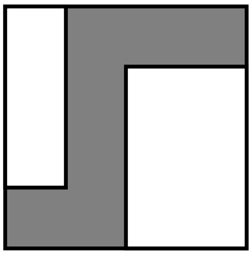


Figure D

De combien d'allumettes Eliott a-t-il encore besoin ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme des périmètres de trois polygones dessinés dans des carrés identiques et dont les côtés sont parallèles aux côtés des carrés, après avoir identifié une unité de mesure adéquate.

Analyse de la tâche

- Comprendre à partir des données du premier carré que sur chacun de ses côtés on peut coller 4 allumettes (16 : 4) et en estimant, à vue ou en recourant à des mesures, que dans les autres figures le côté le plus court correspond à une allumette.
- Reporter cette unité de mesure sur les côtés des 3 autres figures et en trouver le périmètre
  - 16 pour la figure B : 4, 4, 3, 3, 1, 1,
  - 22 pour la figure C : 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 1
  - 16 pour la figure D : 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1

  Additionner les périmètres (en allumettes) des figures 16 + 22 + 16 = 54

Ou

- Pour les figures B et D, voir, par translation ou rotation, que les côtés à l'intérieur du carré correspondent aux segments des côtés des carrés qui ne sont pas compris dans le dessin et que donc ils mesurent 16.

  Pour la figure C, comprendre que le côté horizontal, à l'intérieur du carré, de la figure correspond au segment du coté horizontal en haut qui n'est pas compris dans la figure et qu'il y a, en outre, encore deux segments à considérer, internes à la figure, chacun de longueur 3. En déduire le périmètre de la figure (16 + 6 = 22).

  Additionner les périmètres (en allumettes) des figures 16 + 22 + 16 = 54

Ou

- Mesurer à la règle graduée le côté ou le périmètre de la figure A (puis des autres figures) et utiliser la proportionnalité entre mesures en cm et nombres d'allumettes pour en déduire la réponse pour les autres figures. (Cette procédure plus complexe est sujette aux imprécisions des figures et des mesures).

Niveaux : 5, 6

Origine : Bourg-en-Bresse

9. HUIT TRIANGLES DANS UN CARRÉ (Cat. 5, 6)

La figure 1 représente un carré partagé en huit triangles égaux.

La figure 2 est différente de la figure 1. Elle représente le même carré mais partagé d'une autre manière en huit triangles égaux.

La figure 3 est la même que la figure 2 car elle représente le même partage du carré que la figure 2. Il est possible de superposer exactement les deux figures.

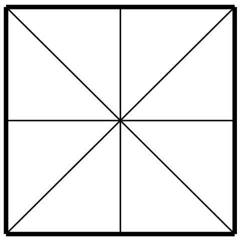


figure 1

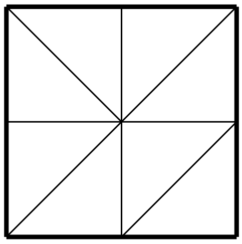


figure 2

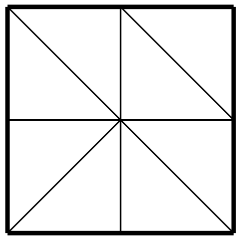
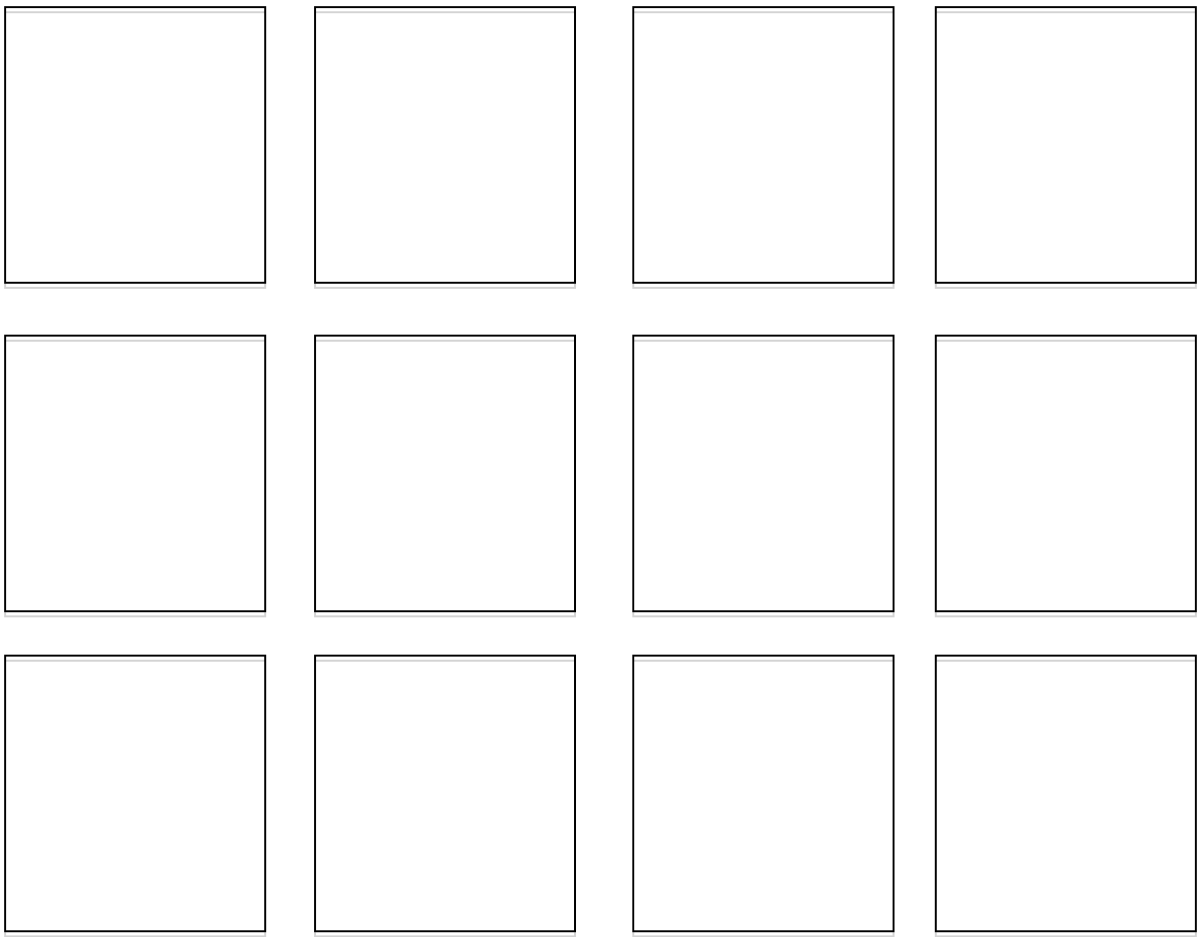


figure 3

Combien y a-t-il de figures différentes (c'est-à-dire qu'on ne peut pas superposer exactement) qui représentent le partage du carré en huit triangles égaux.

Dessinez-les ci-dessous.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

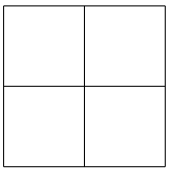
Trouver toutes les partages d'un même carré en 8 triangles rectangles isocèles égaux.

Analyse de la tâche

- Vérifier que les figures 2 et 3 représentent un même partage du carré (on peut passer de l'une à l'autre par une rotation d'un quart de tour et une translation) et que les figures 1 et 2 sont évidemment différentes (les deux diagonales du carré sont tracés sur la figure 1, une diagonale et seulement la « moitié » de la seconde sont tracées sur la figure 2).
- Procéder à de premiers essais en effectuant des dessins sur papier quadrillé, éventuellement des découpages et assemblages de petits triangles, trouver de premières figures et vérifier qu'elles sont différentes.
- Pour un inventaire systématique on peut remarquer que les triangles doivent avoir leurs côtés de l'angle doit sur les côtés ou médianes du carré.

  Il ne reste plus alors qu'à partir de la figure origine et trouver les quatre figures nouvelles 4, 5, 6, 7.

  On peut aussi remarquer que les hypoténuses des triangles sont des diagonales des 4 petits carrés. On peut alors chercher toutes les figures différentes obtenues en traçant une diagonale dans chaque petit carré. Pour cela, on peut envisager les cas où les 4 diagonales ont toute pour extrémité le centre du grand carré, seulement trois d'entre elles, deux d'entre elles, une seule, aucune.



origine

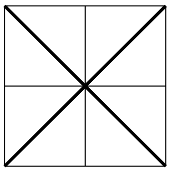


figure 1

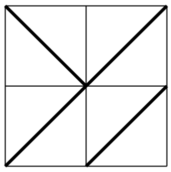


figure 2 ou 3

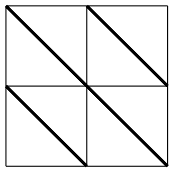


figure 4

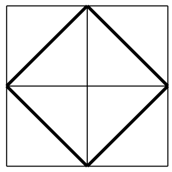


figure 5

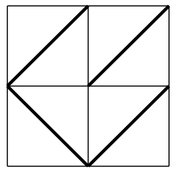


figure 6

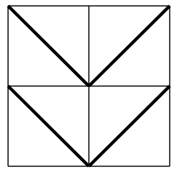


figure 7

Niveaux : 5, 6

Origine : Rozzano et fj

10. LES CHOCOLATS DE ZOÉ (Cat. 5, 6, 7)

Zoé a trente chocolats, elle désire les mettre tous dans des sachets, de telle sorte que chaque sachet contienne le même nombre de chocolats.

Elle commence par faire 5 sachets qui contiennent 6 chocolats chacun puis elle se dit :

Je pourrais aussi faire 6 sachets de 5 chocolats ou 2 sachets de 15 chocolats ou 15 sachets de 2 chocolats ou 3 sachets de 10 chocolats ou 10 sachets de 3 chocolats ou un seul sachet de 30 chocolats ou encore 30 sachets avec un seul chocolat.

J'ai donc huit manières différentes de faire des sachets.

Elle mange un chocolat, il en reste 29 : « Zut, se dit-elle, je n'ai plus que deux manières de faire des sachets : 1 sachet de 29 chocolats ou 29 sachets avec un seul chocolat ».

Elle en mange encore un, puis encore un… Elle décide de s'arrêter quand, avec les chocolats qui lui restent, elle peut faire des sachets de 5 manières différentes et seulement 5 manières.

Combien de chocolats aura-t-elle mangés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le plus grand nombre inférieur à 30 qui peut être décomposé exactement de cinq manières différentes en produits de deux nombres, et calculer le complément de ce nombre à 30.

Analyse de la tâche

- Vérifier éventuellement qu'il y a 8 répartitions possibles pour 30 chocolats, puis 2 répartitions pour 29, puis comprendre qu'il faut continuer à chercher combien il y a de répartitions pour 28 chocolats, puis pour 27, … jusqu'à ce qu'on trouve un nombre de chocolats permettant exactement 5 répartitions.
- Comprendre donc que, chaque fois que Zoé mange un chocolat, il faudra recommencer - avec ceux qui restent - la recherche -d'une répartition en sachets qui contiennent le même nombre de chocolats.
- Trouver que, avec 28 chocolats il y a les six répartitions (1 × 28, 2 × 14, 4 × 7, 7 × 4, 14 × 2, 28 × 1)
- Continuer de la même manière avec 27 (4 répartitions : 1 × 27, 3 × 9, 9 × 3, 27 × 1) ; 26 (4 répartitions : 1 × 26, 2 × 13, 13 × 2, 26 × 1) ; 25 (3 répartitions : 1 × 25, 5 × 5, 25 × 1) ; 24 (8 répartitions : 1 × 24, 2 × 12, 3 × 8, 4 × 6, …) ; 23 (2 répartitions : 1 × 23,…); 22 (4 répartitions : 1 × 22, 2 × 11, …) ; 21 (4 répartitions : 1 × 21, 3 × 7, …) ; 20 (6 répartitions : 1 × 20, 2 × 10, 4 × 5 …) ; 19 (2 répartitions : 1 × 19,…), 18 (6 répartitions : 1 × 18, 2 × 9, 3 × 6 …) ; 17 (2 répartitions 1 × 17,…), 16 (5 répartitions : 1 × 16, 2 × 8, 4 × 4 ; 8 × 2, 16 × 1).
- Constater que 16 est le plus grand nombre inférieur à 30 qui peut être décomposé exactement de cinq manières différentes.
- Calculer enfin que Zoé a mangé 14 chocolats : 30 – 16 = 14.

Ou : faire des essais qui ne sont pas systématiques et qui portent sur des nombres qu'on estime a priori pouvoir satisfaire la condition.

Remarque : Dans une procédure comme dans l'autre, les élèves peuvent après plusieurs essais, constater que tout nombre est décomposable en deux produits où les facteurs sont 1 et le nombre lui-même, et donc restreindre leur recherche à des nombres qui peuvent se décomposer en 3 produits autres que ces deux.

Ou

- Toujours après plusieurs essais, les élèves peuvent constater qu'à chaque fois qu'ils décomposent le nombre en un produit de deux facteurs différents, il y a un deuxième produit avec les mêmes facteurs et donc déduire que pour que le nombre de produits soit impair, il faut que le nombre soit décomposable en un produit d'un nombre par lui-même (autrement dit que le nombre doit être un carré).

Remarque : Une procédure s'appuyant sur la connaissance d'une technique donnant le nombre de diviseurs d'un entier n, pour n inférieur à 30, n'est pas envisageable pour les catégories concernées.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Bourg-en-Bresse

11. DATES PARTICULIÈRES (Cat. 6, 7)

Eugénie voyage sur l'autoroute avec ses parents, elle remarque sur un panneau la date 14/02/2016.

Elle réfléchit un peu et dit : « *C'est curieux, la somme de 14 et 2, ça fait justement 16 !* ».

Sa maman lui répond : « *C'est pareil pour la date de naissance de ta grand-mère le 27/11/1938, c'est la même coïncidence: 27 + 11 = 38. Ce sont vraiment "des dates particulières" !* ».

Durant l'année 1938, en plus de la date de naissance de la grand-mère d'Eugénie, il y a eu d'autres "dates particulières".

Énumérez toutes les dates particulières de l'année 1938 autres que la date de naissance de la grand-mère d'Eugénie.

Montrez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer un nombre en une somme de deux nombres, chacun appartenant à un intervalle contraint.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes à respecter: on ajoute les nombres désignant respectivement le jour à l'intérieur d'un mois et le mois à l'intérieur d'une année, cette somme devant être égale au nombre formé par les deux derniers chiffres de l'année.
- Remarquer que le premier des deux termes de la somme doit être inférieur ou égal à 31 (ou à 30, ou à 28, selon les mois), et que le second terme doit être inférieur ou égal à 12.
- Procéder à une recherche ordonnée de toutes les "dates particulières" vérifiant les mêmes conditions en 1938. Par exemple, partir du nombre maximum de mois possible, 12 pour décembre, et continuer en rétrogradant. En déduire les dates particulières de 1938 :
  26/12/1938 27/11/1938 28/10/1938 29/09/1938 30/08/1938 31/07/1938

Niveaux: 6, 7

Origine: Sienne

12. COLLECTION DE CARTES POSTALES (Cat. 6, 7, 8)

Rita et Roberta font la collection de cartes postales. Rita en a 200 et demande à Roberta combien elle en a.

Roberta lui répond :

- J'en ai moins de 200,
- Si je les regroupe deux par deux, ou trois par trois, ou sept par sept, il en reste toujours une toute seule,
- Si je les regroupe cinq par cinq, il n'en reste aucune.

Quel est le nombre de cartes postales dans la collection de Roberta?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Chercher tous les nombres inférieurs à 200 divisibles par 5, et dont le reste de la division par 2,3 et 7 soit égal à 1.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre cherché est inférieur à 200
- Comprendre à partir de la dernière phrase que ce nombre est multiple de 5 : lister ces multiples jusqu'à 195. Éliminer le 5 celui-ci ne pouvant former un groupe de sept; éliminer tous les multiples de deux (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190); éliminer tous les multiples de 3 (15, 45, 75, 105, 135, 165, 195); éliminer tous les multiples de 7 (35, 175).

  Restent les nombres: 25 – 55 – 65 – 85– 95 – 115 – 125 – 145 – 155 – 185.

  Parmi ceux-ci, l'unique respectant toutes les conditions est 85. (Cette procédure pouvant être effectuée également en partant de 200.)

Ou

- D'après la deuxième condition, déterminer le plus petit commun multiple de 2, 3, 7 égal à 42, puis ajouter 1: 42 + 1 = 43 ; (42 x 2) + 1 = 85 ; (42 x 3) + 1 = 127 ; (42 x 4) + 1 = 169
- Vérifier que seul 85 respecte la condition suivante.

Ou

- Confronter les multiples communs de 2, 3, 7: (42, 84, 126, 168) avec les multiples de 5 immédiatement successifs (45, 85, 130, 170).

Vérifier que seul 85 respecte la deuxième condition

Ou :

- Comprendre que le nombre est un multiple de 5 se terminant par 5, car il n'est pas un multiple de 2.
- Comprendre qu'il faut trouver un multiple de 7, de 3 et de 2, ayant 4 pour chiffre des unités et auquel il faudra ajouter 1.
- Trouver que seul 84 répond à ces exigences et conclure que Roberta possède donc 85 cartes postales.

Niveaux: 6, 7, 8

Origine: Pouilles

13. PYRAMIDES BICOLORES (Cat. 6, 7, 8)

Alexandre possède un grand nombre de petits cubes blancs et un grand nombre de cubes gris. Il les utilise pour construire des tours en forme de pyramide, comme celles que vous vous voyez sur ces deux dessins.

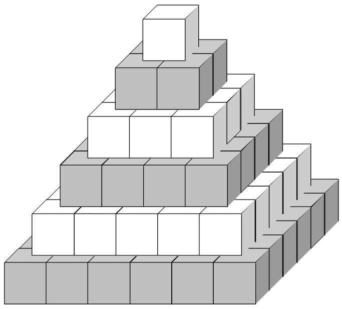


Figure 1

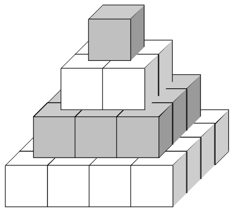


Figure 2

Les règles de construction qu'il utilise sont les suivantes :

- Chaque étage est carré et il est formé de cubes de la même couleur ;
- Deux étages qui se touchent sont de couleur différente ;
- L'étage du début et celui de la fin sont de couleur différente ;
- La tour est terminée par un seul cube.

Aujourd'hui Alexandre a construit une belle tour et a utilisé 165 cubes gris.

Combien de cubes blancs a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans un contexte de constructions pyramidales utilisant des cubes, additionner les carrés des premiers nombres impairs et des premiers nombres pairs, sachant qu'une des deux sommes est égale à 165.

Analyse de la tâche

- Comprendre le mode de constructions des tours, à partir des exemples donnés et des règles décrites.
- Comprendre que les nombres de cubes utilisés pour les différents étages constituent la suite des carrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, …
- Si le cube du dessus est gris, on doit faire les sommes successives des carrés des deux premiers, puis des trois premiers, puis des quatre premiers nombres impairs…. jusqu'à obtenir 165 : 1+ 9; 1+ 9 + 25; 1+ 9 + …= 165 ; se rendre compte que le dernier carré à ajouter est 81 qui correspond au 9ème étage de la tour en partant du haut vers le bas.
- Si le premier cube était blanc, il faudrait additionner les 2ème, 4ème, 6ème,... termes de la suite qui sont tous pairs, et donc leur somme ne peut pas être 165.
- Comme la tour a neuf étages gris, et qu'elle commence par un étage gris, on aura au total 10 étages, puisque le premier et le dernier doivent être de couleurs différentes.
- Additionner ensuite les carrés des nombres pairs de 2à 10 : 4 + 16; 4 + 16 + 36; 4 + 16 + …. = 220.
  Conclure qu'il y a 220 cubes blancs dans la pyramide.

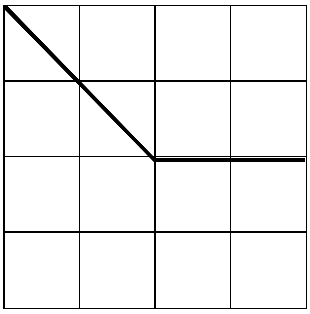
Ou : comprendre tout de suite que le cube du dessus doit être gris étant donné que 165 est un nombre impair et ne peut pas être obtenu par la somme des carrés des nombres pairs.
Procéder donc en additionnant les carrés des nombres impairs pour déterminer la hauteur de la pyramide.

Niveaux: 6, 7, 8

Origine: Sienne

14. LE CARRÉ CHANGE DE FORME (II) (Cat. 6, 7, 8)

Dans le carré dessiné sur papier quadrillé, on a obtenu deux pièces en découpant le long des segments indiqués.



Si on déplace les deux pièces ou qu'on en retourne une et qu'ensuite on les assemble de façon à ce qu'un côté d'une pièce coïncide exactement avec un côté de l'autre, on obtient une autre figure.

Dessinez sur une feuille de papier quadrillé toutes les figures différentes, autres que le carré, qu'il est possible d'obtenir avec les deux pièces du carré en respectant la règle d'assemblage

Attention : deux figures sont différentes si elles ne sont pas exactement superposables.

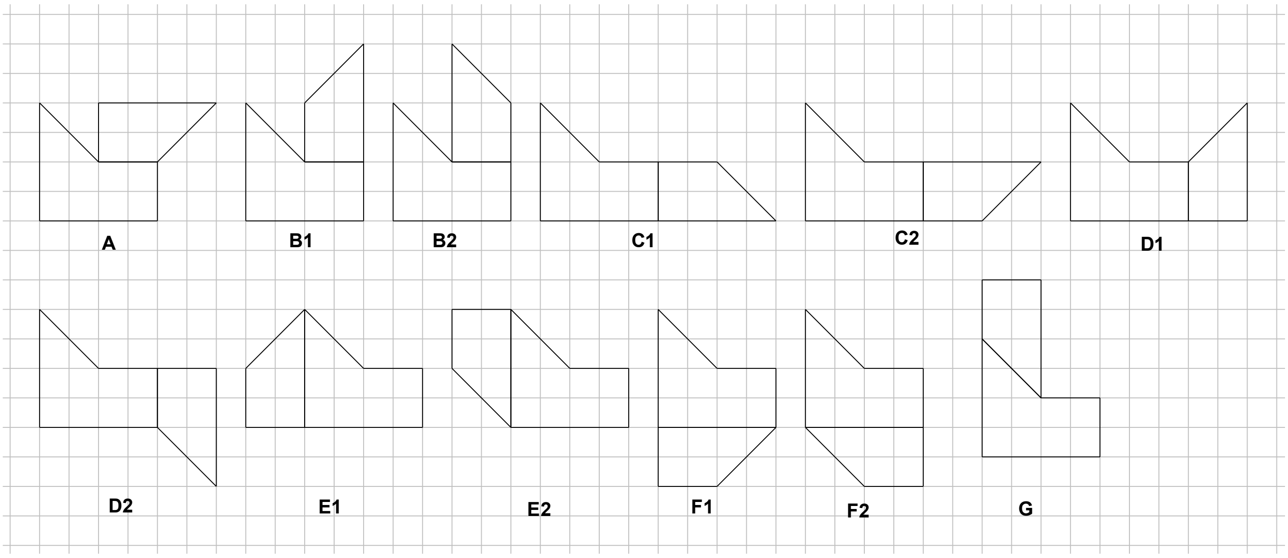
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les polygones qui peuvent être formés en combinant des côtés de même longueur de deux polygones obtenus en partageant un carré en deux parties.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les figures recherchées sont toutes réalisées à partir des deux mêmes pièces du carré assemblées de différentes façons (il est permis de retourner l'une ou l'autre des pièces) en ayant un côté commun
- Anlayser les deux pièces, trapèze rectangle et pentagone, qui composent le carré et repérer les côtés d'une même pièce qui ont même longueur et les côtés des deux pièces qui ont même longueur. En particulier, se rendre compte qu'ont même longueur : la grande base du trapèze et deux côtés du pentagone, la petite base et la hauteur du trapèze et deux côtés du pentagone, le côté "oblique" du trapèze et le côté "oblique" du pentagone
- Imaginer asembler les deux pièces du carré en respectant les règles indiquées et essayer de dessiner les figures obtenues sur une feuille quadrillée. L'identification des figures peut être facilitée en découpant un exemplaire du trapèze et du pentagone et en cherchant à les assembler de façon à ce qu les deux pièces aient exactement un côté commun.
- Procéder de façon non organisée (dans ce cas, il est probable que toutes les figures ne soient pas trouvées) ou de façon organisée. Dans ce second cas, considérer par exemple la pièce en forme de pentagone, choisir un de ses côtés et rechercher le ou les côtés du trapèze rectangle qui ont même longueur. Pour chaque côté trouvé, assembler les deux pièces. Se rendre compte qu'en assemblant le pentagone avec le trapèze rectangle par les mêmes côtés après avoir retourné le trapèze rectangle, il est possible parfois d'obtenir une autre figure qui n'est pas superposable à la première (cf. les figures B_1 e B_2; C_1 e C_2; D_1 e D_2; E_1 e E_2; F_1 e F_2), tandis que dans d'autres cas, il est impossible de construire une autre fgure (cf. les figures A, G)
- Une tâche assez délicate est de contrôler que les figures obtenues ne sont pas superposables les unes aux autres. Une méthode efficace pour le vérifier expérimentalement consiste par exemple à reproduire une des deux figures à comparer sur une feuille de papier assez mince pour voir par transparence et à s'assurer que la reproduction de la figure, éventuellement après retournement de la feuille, n'est pas superposable à l'autre figure. (Il est possible de constater de cette façon que deux figures superposables s'obtiennent l'une à partir de l'autre en retournant les deux pièces qui les composent)
- Conclure que les figures recherchées (distinctes du carré et non isométriques entre elles) sont les 12 figures reproduites ci-dessous



Niveaux : 6 , 7 , 8

Origine: Sienne

15 CARRÉS MAGIQUES MULTIPLICATIFS (Cat. 7, 8)

Un carré magique multiplicatif est un carré dans lequel les produits des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égaux.

Les nombres placés dans les cases d'un carré magique doivent être tous différents.

Rosanna veut réaliser un carré magique multiplicatif en utilisant les puissances de 2 avec les exposants de 0 à 8. Elle commence par placer 2 exposant 4 dans la case centrale.

	2^4	

Elle continue en plaçant dans une même diagonale le double et la moitié du nombre qu'elle a placé dans la case centrale.

Aidez Rosanna à compléter de toutes les façons possibles son carré multiplicatif avec les puissances de 2 d'exposants 0 à 8 non encore utilisées.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Construire des carrés magiques multiplicatifs dans lesquels la case centrale est déjà remplie, en utilsant des puissances de 2 et leurs propriétés, en respecatant des contraintes sur les exposants et sur les puissances à placer sur une deux diagonales.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le double de 2^4 est 2^5 et que sa moitié est 2^3 et les placer sur une diagonale
- Calculer le produit des puissances placées sur la diagonale en effectuant la somme des exposants (2^{12}).
- Comprendre que la somme des exposants des puissances qui sont dans chaque ligne et dans chaque colonne doit être égale à 12. Compléter les lignes et les colonnes d'un carré magique en tenant compte par exemple des différentes façons d'obtenir 9 (12 – 3) si on complète une ligne ou une colonne qui contient déjà la puissance troisème de 2, ou d'obtenir 7 (12 − 5) si on complète une ligne ou une colonne qui contient déjà la puissance cinquième de 2, ou 8 (12 – 4) si on complète une ligne ou une colonne qui contient déjà la puissance quatrième de 2.

Ou

Calculer $2^4 = 16$, puis le double et la moitié, trouver le produit constant. Calculer toutes les autres puissances de 2 ayant un exposant compris entre 0 et 8 et compléter un carré en faisant des essais avec ces nombres, puis remplacer les nombres par leur écriture sous forme de puissances de 2.

Par symétrie et rotation du carré trouvé, en déduire les autres et déterminer qu'ils sont au nombre de 8.

2^3	2^8	2^1
2^2	2^4	2^6
2^7	2^0	2^5

2^5	2^6	2^1
2^0	2^4	2^8
2^7	2^2	2^3

2^1	2^8	2^3
2^6	2^4	2^2
2^5	2^0	2^7

2^1	2^6	2^5
2^8	2^4	2^0
2^3	2^2	2^7

2^3	2^2	2^7
2^8	2^4	2^0
2^1	2^6	2^5

2^7	2^2	2^3
2^0	2^4	2^8
2^5	2^6	2^1

2^5	2^0	2^7
2^6	2^4	2^2
2^1	2^8	2^3

2^7	2^0	2^5
2^2	2^4	2^6
2^3	2^8	2^1

Ou

Construire tous les carrés magiques additifs 3 × 3 avec les nombres de 0 à 8 et avec 4 dans la case centrale. Ensuite, transformer les carrés trouvés en carrés multiplicatifs en écrivant dans chaque case la puissance de 2 ayant pour exposant le nombre qui s'y trouve.

Niveaux : 7, 8

Origine: Aoste

16. ÉTRANGES TRIANGLES (Cat. 7, 8)

Le professeur de mathématiques a demandé à ses élèves, en devoir à la maison, de trouver tous les triangles qui vérifient les trois conditions suivantes :

- leur périmètre mesure 36 cm ;
- les mesures des côtés, exprimées en centimètres, sont des nombres entiers ;
- la différence de longueur entre leurs deux côtés les plus longs est égale à 6 cm.

Le lendemain, certains étudiants disent qu'ils ont trouvé cinq triangles, d'autres trois et d'autres seulement deux.

Quelle est la bonne réponse?

Justifiez votre réponse, en indiquant les longueurs des côtés des triangles trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les longueurs possibles, exprimées en nombres entiers, des côtés de triangles dont sont donnés le périmètre et la différence de longueur entre les des deux côtés les plus longs.

Analyse de la tâche

- Imaginer la taille de certains triangles répondant aux trois conditions. Se rendre compte que, du point de vue numérique, il faut trouver trois nombres dont la somme est 36 et pour lesquels la différence entre les deux plus grands est égale à 6.
- Au vu de la taille des nombres, considérer qu'il n'y a pas beaucoup de solutions et, par conséquent, qu'il est possible de faire un inventaire des triplets de nombres possibles du point vue mathématique, ce qui aboutit à cinq triplets de nombres qui vérifient les trois conditions :
  (20, 14, 2), (19, 13, 4), (18, 12, 6), (17, 11, 8), (16, 10, 10).
- Se placer ensuite dans le contexte géométrique pour chercher parmi ces triplets lesquels correspondent à des triangles constructibles. Pour cela, il est possible :
  - d'essayer de construire les triangles et de voir qu'il y a deux triplets qui sont bons : (17, 11, 8) et (16, 10, 10) et un doute sur le triplet (18, 12, 6) ; le triangle correspondant à ce triplet parait constructible à la règle et au compas, mais il est "presque à plat". Pour surmonter le doute, remarquer que la longueur du côté le plus long (18 cm) est égale à la somme des longueurs des deux autres côtés et dépasser l'illusion visuelle de la construction (en raison de l'épaisseur des lignes ou à la précision des mesures) pour en déduire que les trois sommets sont alignés. Il est également possible de se référer à un théorème connu relatif à l'inégalité triangulaire.
  - Ou, sans construire les triangles effectivement, utiliser le théorème relatif à l'inégalité triangulaire pour conclure.

Niveaux : 7, 8

Origine: Suisse Romande

17. SOUPE EN PROMOTION (CAT. 8)

Une entreprise produit une soupe à la tomate qui est conditionnée en boites d'un litre.

Les boites sont de forme cylindrique de diamètre 8,4 cm.

Au cours d'une campagne de promotion, la société décide d'offrir à ses clients, au même prix, des boites de même hauteur, mais qui contiennent 15% de soupe en plus.

Quel est le diamètre des nouvelles boites de soupe ?

Effectuez les calculs au millimètre près.

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer le diamètre d'un cylindre dont le volume est supérieur de 15% à celui d'un autre cylindre de même hauteur et dont le diamètre est connu.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le volume des boites préparées pour la promotion est supérieur de 15% au volume des boites habituellement utilisées, à savoir 1,15 litres ou 1 150 cm3.
- Déterminer la hauteur des boites hors promotion : après avoir converti 1 litre en 1 000 cm^3 : la superficie de base est égale à $\pi \times (8{,}4/2)^2 \approx 55{,}42$ cm^2 (pour $\pi = 3{,}142$), $\pi \times (8{,}4/2)^2 \approx 55{,}39$ cm^2 (pour $\pi = 3{,}14$), donc la hauteur est $1\,000/55{,}42 \approx 18{,}04$ cm ou $1\,000/55{,}39 \approx 18{,}05$ cm
- Déterminer l'aire de la base des nouvelles boites : $1\,150/18{,}04 \approx 1\,150/18{,}05 \approx 63{,}7$ cm^2, puis le diamètre : $2 \times \sqrt{63{,}7/\pi} \approx 9{,}0$ cm.

Ou utiliser les proportions pour trouver directement l'aire de base des boites en promotion

- Déterminer l'aire de base des boites habituellement utilisées : $\pi \times (8{,}4/2)^2 \approx 55{,}42$
- Calculer l'aire de base des boites en promotion : V : 55,42 = (V x 1,15) : x; $x \approx 63{,}7$; puis le diamètre : $2 \times \sqrt{63{,}7/\pi} \approx 9{,}0$ cm

Ou utiliser une procédure algébrique :

- Si, respectivement, V et V' sont les volumes des boites hors promotion et en promotion, h leur hauteur et d et d' leurs diamètres de base, on a :
  V = 1 litre = 1 000 cm^3, d = 8,4 cm, $V' = V\,(1 + 0{,}15) = 1\,150$ cm^3.
- Calculer V' en fonction de d' : $V' = h \times \pi \times (d'/2)^2$ et $h = V/[\pi \times (d/2)^2]$, d'où on tire : $V' = V/[\pi \text{ x } (d/2)^2] \times \pi \times (d'/2)^2$,
  Ce qui donne : $V' = V \text{ x } (d'/d)^2$.
- Résoudre l'équation d'inconnue d' pour calculer sa valeur :

  $d' = d \times \sqrt{(V'/V)} = d \times \sqrt{(1{,}15)} \approx 9$cm.

Niveaux : 8

Origine : Franche-Comté

18. LE TAPIS ROULANT (CAT. 8)

À Paris, il y a une station de métro dans laquelle un couloir mesure 250 mètres.

Pour faciliter le passage, on a installé un tapis roulant sur toute sa longueur.

Ce tapis roulant avance à une vitesse de 3 km à l'heure.

Michèle, qui est pressée, prend le tapis roulant en continuant à marcher à sa vitesse habituelle. Elle traverse ainsi le couloir en seulement deux minutes.

Quelle est la vitesse à laquelle Michèle marche habituellement ?

Expliquez comment vous l'avez trouvée.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Calculer la vitesse d'une personne marchant sur un tapis roulant en mouvement, sur une distance et en un temps donnés.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour traverser le couloir, Michèle doit marcher moins longtemps sur le tapis roulant que si elle était restée immobile, parce que sa vitesse s'ajoute à celle du tapis roulant.
- Calculer le temps nécessaire pour traverser le couloir en restant immobile sur le tapis roulant : 250 : 3 000 = 1/12 d'heure, soit 5 minutes.
- Calculer la vitesse à laquelle Michèle a traversé le couloir : 250 : (1/30) = 7 500m/h soit 7,5 km/h et en déduire que sa vitesse habituelle de marche est de 4,5 km/h (7,5 - 3).

Ou, calculer la vitesse à laquelle Michèle a traversé le couloir sur le tapis roulant, en mètres par minute : 250 / 2 = 125 mètres par minute, soit 7 500 mètres à l'heure (125 x 60). En déduire que la vitesse à laquelle Michèle marche habituellement est de 4,5 km/h (7,5 - 3).

Niveau : 8

Origine : Franche Comté