Titre	or.	cat.	Thème mathématique
1. Les ballons colorés (I)	SI	3	proportion (3 est à 24 comme 2 est à x) et somme (24 + x)
2. Les feuilles de l'arbre	BB	3-4	comptage à partir de deux dessins incomplets
3. Nombres à deux ou trois chiffres	BE	3-4	arrangements de 3 objets pris 1 à 1, 2 à 2 ou 3 à 3
4. De l'or et des pirates	BE	3-4	décomposition additive de 54 en 8 termes, dont 6 égaux
5. Code secret	LU	3-5	jeu de « Mastermind » sur des nombres de trois chiffres
6. Les ballons colorés (II)	SI	4-5	deux proportions : 3 est à 24 comme 2 est à x, puis 4 est à 24 comme 2 est à y et somme 24 +24+ x + y,
7. Jeu de cubes	RZ	4-5	vision d'empilements représentés en perspective
8. Chameaux et dromadaires	5.I	5-6	système de 2 équations dans N
9. Le bassin	MI	5-6	décomposition additive de 49 en multiples de 3, 4, 5
10. Arbres de Noël à Milan	PR	5-7	événements périodiques selon multiples communs de 12, 14, 18
11. Les pièces de monnaie	FC	5-8	système de 2 équations dans N
12. Tétracubes	UD	6-8	reconnaissance de tétracubes différents vus en perspective
13. Pièces magnétiques	SI	6-8	système de 3 équations dans N
14. Partage d'un terrain	FC	6-8	partage d'un rectangle en un rectangle et une partie équivalente
15. Intersection	SR	7-8	intersection de deux droites données chacune par deux points
16. Jardin carré	SI	7-8	nombres dont les carrés ont une différence de 75
17. La boîte de cubes	16.I	8	empilement de cubes de 1^3 et de 2^3 dans une boîte

1. LES BALLONS COLORES (I) (Cat. 3)

CLASSE : SR - ________

Pour la fête de l'école, les enfants de la classe de Fabienne accrochent une rangée de ballons, les uns à côté des autres, sur le mur du préau.

Les 3 premiers ballons sont bleus, les 2 suivants sont rouges, puis les 3 ballons suivants sont bleus, suivis de 2 ballons rouges et ainsi de suite. Les enfants continuent à accrocher les ballons jusqu'au bout du mur. Lorsqu'ils ont terminé, ils ont constaté que les deux derniers ballons sont rouges.

Pour réaliser cette rangée de ballons, les enfants ont utilisé 24 ballons bleus.

Au total, combien de ballons sont accrochés sur le mur du préau ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre total de ballons d'une file, selon une séquence périodique de 3 ballons bleus et de 2 ballons rouges, dont 24 ballons sont bleus.

Analyse de la tâche

- Imaginer la rangée de ballons où se répète une période de 3 ballons bleus et 2 ballons rouges et/ou en dessiner le début.
- Poursuivre le dessin jusqu'à ce qu'on ait 24 ballons bleus et en terminant la rangée par deux ballons rouges ; puis compter le nombre total de ballons : 40. (Le non respect de la consigne « la rangée se termine avec 2 ballons rouges » entraînerait la réponse erronée 38).

Ou, utiliser un raisonnement arithmétique, par exemple :

considérer que 24 ballons bleus correspondent à une répétition de 8 fois les 3 ballons bleus d'une séquence (8 = 24 : 3) et calculer le nombre de ballons rouges (16 = 2 × 8).

- Déduire enfin que le total des ballons est 40 = 24 + 16.

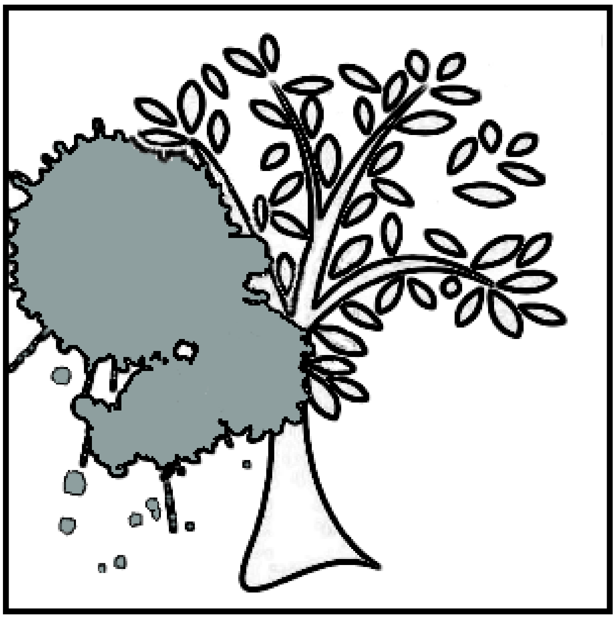
Niveau : 3

Origine : Sienne

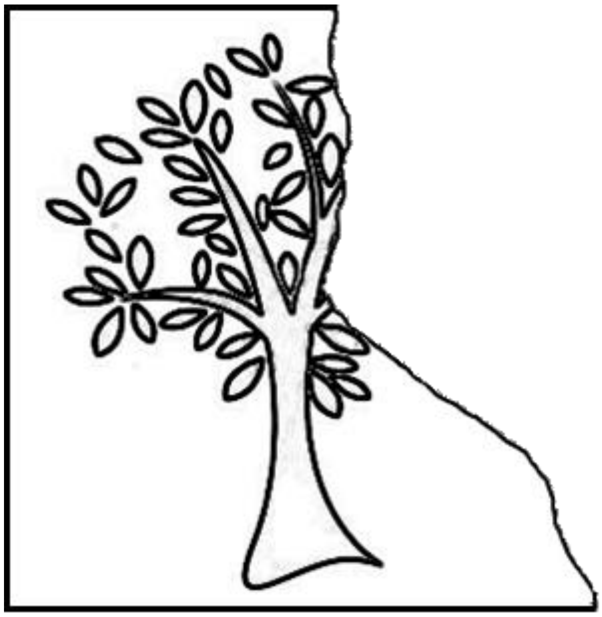
2. LES FEUILLES DE L'ARBRE (Cat. 3,4) CLASSE : SR - ________

La maitresse a distribué le même dessin à deux élèves. Malheureusement, Philippe a fait une grosse tache sur son dessin et Georges a déchiré sa feuille.

Voici les deux dessins :



Philippe



Georges

Combien de feuilles y avait-il sur le dessin de l'arbre distribué par la maitresse ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dénombrer une quantité d'objets représentés sur un dessin à partir de deux copies incomplètes de ce dessin, sur lesquelles figurent tous les objets, certains figurant sur les deux.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il s'agit du même objet dont une partie est représentée sur chacun des dessins.
- Constater que toutes les feuilles ne sont pas visibles sur un seul dessin et qu'il faudra passer de l'un à l'autre pour les compter toutes en évitant de compter deux fois celles qui figurent sur les deux.
- Compter une à une les feuilles d'un dessin, puis celles de l'autre qui ne sont pas déjà comptées sur le premier. On peut s'aider de marques, d'une numérotation des feuilles, de couleurs, … pour ne pas en oublier. La difficulté principale est le contrôle des feuilles déjà présentes sur le premier dessin, qu'on peut éventuellement biffer une à une sur le second.

Ou, observer les dessins et constater que les feuilles peuvent être rangées dans 3 catégories :

- Les feuilles cachées sur le dessin de Philippe mais pas sur celui de Georges (20)
- Les feuilles disparues sur le dessin de Georges mais pas sur celui de Philippe (28)
- Les feuilles visibles sur les deux dessins (20)

Terminer en additionnant les trois nombres (20 + 20 + 28 = 68)

Ou reconstituer l'arbre entier soit en complétant un des deux dessins, soit en décalquant, soit encore en coupant et collant, après avoir identifié sur l'un des dessins la partie qui est manquante sur l'autre. Compter les feuilles de l'arbre reconstruit.

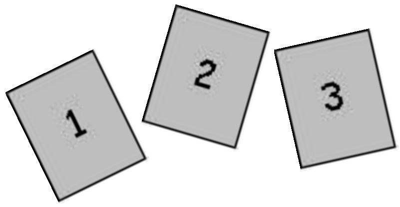
Niveaux : 3, 4

Origine : Bourg en Bresse

3. NOMBRES A DEUX OU TROIS CHIFFRES (Cat. 3, 4)

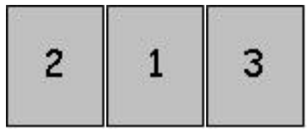
CLASSE : SR - ________

Pascaline a trois cartes portant les chiffres 1, 2 et 3, avec lesquelles elle s'amuse à former des nombres.



Par exemple, elle forme le nombre 31 en plaçant le 3 et le 1 comme ceci :

ou le nombre 213 en disposant les trois cartes comme ceci :



Combien Pascaline peut-elle former de nombres avec une, deux ou toutes ses trois cartes ?

Ecrivez-les tous.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les nombres de un, deux ou trois chiffres formés avec un seul des trois chiffres 1, 2, 3, (arrangements sans répétition de 3 objets pris 1 à 1, 2 à 2 ou 3 à 3

Analyse de la tâche

- Comprendre que les différentes façons de former un nombre dépendent des chiffres utilisés et de la position qu'ils occupent (centaine, dizaine ou unité).
- Comprendre que chaque chiffre ne peut être utilisé qu'une seule fois dans chaque nombre
- Comprendre qu'en prenant les cartes une à une on peut former les trois nombres 1, 2 et 3.
- Établir une stratégie qui permet d'inventorier systématiquement toutes les dispositions de deux ou trois cartes pour ne pas perdre de solutions. Par exemple :

  pour les nombres à 2 chiffres, en choisissant pour commencer le « 1 » pour chiffre des dizaines on trouve les deux possibilités de chiffre des unités : 12 et 13

  même chose avec les chiffres 2 et 3 : 21 et 23 ; 31 et 32

  pour les nombres à 3 chiffres, en choisissant pour commencer le « 1 » pour chiffre des centaines et en lui associant les nombres à deux chiffres ne comportant par 1, on trouve 123 et 132

  même chose avec les chiffres 2 et 3 : 213 et 231 ; 312 et 321
- Dénombrer les 15 possibilités.

Ou : procéder par essais d'écriture de nombres de un, deux ou trois chiffres en s'assurant de la non-répétition des nombres et en les organisant à la fin pour trouver des nombres manquants.

Niveaux : 3, 4

Origine : Belgique, problème inspiré du problème 7 du 23e RMT.I (Les bagues)

4. DE L'OR ET DES PIRATES (Cat. 3, 4)

CLASSE : SR - ________

Une bande de pirates (le capitaine Barbenoire, son second Barberousse et six matelots) se partage 56 pièces d'or :

- les six matelots reçoivent chacun le même nombre de pièces ;
- Barberoussse, le second, reçoit deux pièces de plus qu'un matelot ;
- Barbenoire, le capitaine, reçoit quatre pièces de plus que Barberousse.

Combien chacun des pirates reçoit-il de pièces ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 56 en une somme de huit termes dont six sont égaux, un septième vaut 2 de plus que les premiers et le huitième 4 de plus que le septième.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a huit personnes qui doivent se répartir 56 pièces d'or de manière inégale.
- Se rendre compte qu'il s'agit de compléter une addition dont seule la somme est connue (56), dont les huit termes ne sont pas encore déterminés mais dont on connaît des relations entre certains d'entre eux.
- Procéder par essais, au hasard ou organisés jusqu'à obtenir la répartition 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8 et 12 ou $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$

Ou : retirer 6 et 2, les nombres supplémentaires du second et du capitaine, de 56 et pour obtenir 48 et répartir ce nombre en 8 parties égales (6) puis ajouter 2 puis 6 pour obtenir les parts du second et du capitaine (8 et 12).

Ou : diviser les 56 pièces en 8 parts de 7 et compenser en retirant une pièce de la part de chacun des six matelots (qui en auront 6), en en donnant une au second (qui en aura 8) et les cinq autres au capitaine (qui en aura 12).

Les différentes stratégies peuvent être illustrées de représentations graphiques, plus ou moins précises, qui correspondent aux opérations arithmétiques.

Une erreur possible est de répartir les 56 pièces de la même façon entre les 8 pirates, ce qui fait 7 pièces par pirate.

Une autre erreur est de considérer que le capitaine ne reçoit que 4 pièces de plus que les matelots.

Une erreur peut également être de ne pas se baser sur la bonne information au moment de la répartition des 48 pièces (diviser par 6 qui est le nombre de matelots, plutôt que de diviser par 8 qui est le nombre de pirates).

Niveaux : 3, 4

Origine : Belgique, inspiré du problème 8 du 23e RMT.I (Le Ruban)

5. CODE SECRET (Cat. 3, 4, 5)

CLASSE : SR - __________

Oncle Picsou a choisi un code pour son coffre-fort.

Afin d'être sûr de pouvoir retrouver son code, il a noté les informations suivantes dans son calepin :

« Mon code est un nombre composé de trois chiffres différents.
Aucun des cinq codes ci-dessous n'est correct, mais les phrases écrites à côté de ces codes sont vraies :

- *134 : un seul chiffre est correct et bien placé*
- *734 : aucun chiffre n'est correct*
- *625 : aucun chiffre n'est correct*
- *952 : un seul chiffre est correct et mal placé*
- *786 : un seul chiffre est correct et mal placé. »*

Quel est le code choisi par oncle Picsou ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre de trois chiffres à partir de cinq suggestions indiquant les chiffres « corrects » et/ou « bien placés » (Jeu du Mastermind)

Analyse de la tâche

- Comprendre que le code comporte 3 chiffres différents, choisis dans l'ensemble dix chiffres qui doivent être disposés au bon endroit dans le code.
- Parmi les stratégies possibles, la plus simple est d'éliminer les chiffres qui, d'après les 2e et 3e informations, ne doivent pas être pris en compte c'est-à-dire éliminer les chiffres 2, 3, 4, 5, 6 et 7 des cinq codes proposés.
- Noter alors qu'il ne reste que le 1 dans le premier code, correct et bien placé, et qu'on a ainsi le chiffre des centaines.
- Noter ensuite qu'il ne reste que le 9 dans le quatrième code, correct mais mal placé qui peut être le chiffre des dizaines ou des unités.
- Noter finalement qu'il ne reste que le 8 dans le cinquième code, qui est correct mais mal placé à la place des dizaines et qui doit être le chiffre des unités puisque celui des centaines est déjà déterminé, le 1.
- Conclure que le 9 doit occuper la place encore libre du chiffre des dizaines et que le code secret est 198.

Ou, procéder en partie par déduction et par essais de nombre de 3 chiffres en les confrontant aux informations données.

Niveau : 3, 4, 5

Origine : Luxembourg

6. LES BALLONS COLORES (II) (Cat. 4, 5)

CLASSE : SR - _________

Pour la fête de l'école, les enfants de la classe de Fabienne ont accroché une rangée de ballons, les uns à côté des autres, sur un mur du préau et une autre rangée sur le mur d'en face.

Sur le premier mur, la rangée de ballons commence avec 3 ballons bleus, puis elle continue avec 2 ballons rouges, puis encore 3 ballons bleus suivis de 2 ballons rouges … et ainsi de suite. La rangée de ballons se termine avec 2 ballons rouges.

Sur le deuxième mur, la rangée commence par 2 ballons jaunes, puis elle continue avec 4 ballons verts, puis 2 ballons jaunes suivis de 4 ballons verts… et ainsi de suite. La rangée se termine avec 4 ballons verts.

Pour réaliser ces rangées de ballons, les enfants ont utilisé 24 ballons bleus et le même nombre de ballons verts.

Au total, combien de ballons sont accrochés sur les murs du préau ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre total de ballons de deux files, selon des séquences périodiques : de 3 ballons bleus et de 2 ballons rouges, dont 24 ballons sont bleus pour la première file ; de 2 ballons jaunes et de 4 ballons verts, dont 24 ballons sont verts pour la seconde file.

Analyse de la tâche

- Imaginer les deux rangées de ballons, ou éventuellement en dessiner le début, où se répète, dans la première une période de 3 ballons bleus et 2 ballons rouges, dans la seconde une période de 2 ballons jaunes et de 4 ballons verts, et/ou en dessiner le début.
- Graphiquement, poursuivre les dessins jusqu'à ce qu'on ait 24 ballons de la couleur désignée (bleus pour la première rangée, verts pour la seconde) et en les terminant pas les ballons de l'autre couleur (2 rouges pour la première rangée, 4 verts pour la seconde). Puis compter les nombres de ballons : 40 et 36, pour un total de 76 ballons.

Ou : Utiliser un raisonnement arithmétique, par exemple pour la 1ère rangée de ballons :

considérer que 24 ballons bleus correspondent à une répétition de 8 fois les 3 ballons bleus d'une séquence (8 = 24 : 3) et en déduire le nombre de ballons rouges (16 = 2 × 8) ;

pour la 2e rangée, le même raisonnement conduit à 6 groupes constitués de 4 ballons verts (6 = 24 : 4) et donc à 12 ballons jaunes (2 × 6).

- Déduire enfin que le total des ballons est 76 = (24 + 16) + (24 + 12).

Niveau : 4, 5

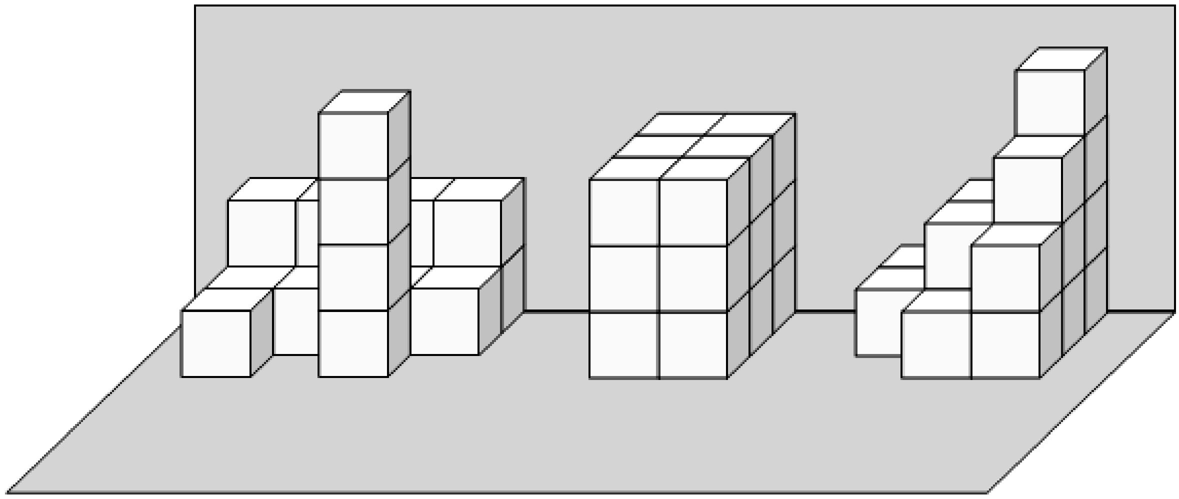
Origine : Sienne

7. JEU DE CUBES (Cat. 4, 5)

CLASSE : SR - _________

Laurent, Jean et André jouent avec des cubes.
Chacun d'eux a fait une construction en empilant des cubes les uns sur les autres contre un mur.

Construction de Laurent | Construction de Jean | Construction de André



Combien chacun d'eux a-t-il utilisé de cubes pour faire sa construction ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer à partir de représentations en perspective cavalière le nombre de cubes nécessaires à la réalisation de trois assemblages.

Analyse de la tâche

- Observer les représentations et comprendre que sur les cubes visibles une, deux ou trois de leurs faces sont visibles. Comprendre qu'il y a aussi des cubes qui sont cachés et dont il faut tenir compte et que leur existence est révélée par la présence de cubes placés au-dessus.
- Imaginer ou réaliser les constructions avec des cubes à disposition en classe.
- Dénombrer les cubes qui composent chaque construction. Le dénombrement peut se faire par comptage un a un ou en recourant à des calculs (par exemple construction de Laurent $3 \times 4 + 4 + 1 = 17$; celle de Jean $3 \times 2 \times 3 = 18$ celle d'André $3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 16$) ou calculs similaires.

Niveau: 4, 5

Origine: Rozzano

.

8. CHAMEAUX ET DROMADAIRES (Cat. 5, 6)

CLASSE : SR - ________

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 23 bosses et 68 pattes.

Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une.

Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.

Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer deux nombres naturels soumis à deux relations : leur somme est un quart de 68 et la somme du premier et du double du deuxième est 63, dans un contexte de chameaux et de dromadaires

Analyse de la tâche[1]

- S'approprier la situation en comprenant que pour chaque chameau il faudra compter deux bosses et quatre pattes et pour chaque dromadaire 1 bosse et quatre pattes.
- Traduire les données en relations numériques entre les nombres d'animaux, de chameaux, de dromadaires, en commençant par le nombre d'animaux $4 \times \ldots = 68$ ou $68 : 4$ et en tirer qu'il y a 17 animaux.
- Trouver les nombres de chacun des deux types d'animaux, sachant que leur somme est 17 et que la somme des bosses (ou du nombre de dromadaires et du double du nombre de chameaux) est 23.

Pour résoudre ce « système d'équations » on peut procéder par essais au hasard, par essais organisés progressivement, par inventaires de tous les couples dont la somme est 17, soit par déductions du genre : si tous les animaux sont des dromadaires, il y aurait 17 bosses et il en manquerait 6 ; par conséquent il faut remplacer 6 dromadaires par 6 chameaux. Il y aura donc 6 chameaux et 11 dromadaires (vérifiant $6 + 11 = 17$ et $6 \times 2 + 11 = 23$)

- Sans passer par les écritures arithmétiques, le problème peut aussi se résoudre par dessin uniquement. Par exemple des groupes de quatre pattes jusqu'à 68 (17 groupes), une bosse par groupe (17) et 6 bosses supplémentaires réparties sur 6 groupes pour arriver à 23.
- Rédiger la réponse sans oublier que la demande porte sur le nombre d'hommes, 6, correspondant au nombre de chameaux.

Niveaux : 5, 6

Origine : 5RMT.I.09

---

[1] Se réfère à l'analyse a posteriori du problème proposé lors du 5e RMT. (voir Actes Brigue 1997-1998)

9. LE BASSIN (Cat. 5, 6)

CLASSE : SR - _________

Charles désire remplir le bassin de son jardin avec 49 litres d'eau.

Pour transporter l'eau, il dispose de trois seaux, l'un de 3 litres, un autre de 4 litres et le dernier de 5 litres.

Charles veut faire le moins possible de voyages en ne transportant qu'un seul seau à la fois, plein à ras bord. Mais il désire utiliser chacun des seaux au moins une fois.

Combien de voyages, au minimum, Charles devra-t-il faire ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et indiquez le nombre de seaux de chaque type qu'il pourrait utiliser pour remplir le bassin.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 49 en une somme du plus petit nombre de multiples non nuls de 3, 4 et 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le problème comporte deux contraintes : utiliser les trois seaux et faire le moins de voyages possibles.
- Se rendre compte que pour faire le moins de voyages possibles, Charles doit utiliser le plus possible les seaux les plus grands.
- Procéder par essais organisés. Par exemple :

  Si Charles a transporté 9 seaux de 5 litres, il a déversé 45 litres et il manque encore 49 – 45 = 4 litres. Avec le seau de 4 litres, le bassin sera rempli mais Charles n'aura pas utilisé tous les seaux, ce qui ne convient pas.

  Si Charles a transporté 8 seaux de 5 litres (soit 40 litres), il doit encore déversé 9 litres (49 – 40 = 9) qui ne peuvent être transportés qu'avec le seau de 3 litres, mais il n'aura pas utilisé tous les seaux, ce qui ne convient pas.

  Avec 7 seaux de 5 litres (soit 35 litres), il reste à déverser 14 litres (49 – 35 = 14); qui peuvent être transportés en utilisant 2 fois le seau de 4 litres et 2 fois le seau de 3 litres. **Ce qui fait en tout 11 voyages** ($7 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3 = 49$).

  Avec 6 seaux de 5 litres (soit 30 litres) il reste à déverser encore 19 litres qui peuvent être transportés en utilisant 4 fois le seau de 4 litres et 1 fois le seau de 3 litres. **Ce qui fait en tout 11 voyages** ($6 \times 5 + 4 \times 4 + 1 \times 3 = 49$).

  Continuer encore en utilisant 5 seaux de 5 et 4 de 5 litres et se rendre compte que le nombre de voyages augmente toujours plus.

  Conclure que Charles a pu remplir le bassin de deux façons optimales en faisant dans chaque cas 11 voyages.
- Ou procéder par essais non organisés qui peuvent conduire à une solution mais qui permettront difficilement de trouver les deux.

Niveau : 5, 6

Origine : Milano

10. ARBRES DE NOEL A MILAN (CAT. 5, 6, 7)

CLASSE : SR - _________

En décembre dernier, sur la place du Dôme de Milan, trois arbres de Noël étaient illuminés par intermittence, un aux lumières rouges, un aux lumières jaunes et un aux lumières blanches.

L'arbre avec les lumières rouges était illuminé pendant huit minutes et éteint pendant quatre minutes, puis il s'allumait de nouveau pendant huit minutes et s'éteignait pendant quatre minutes, et ainsi de suite.

L'arbre aux lumières jaunes était illuminé pendant neuf minutes et éteint pendant cinq minutes, avant de s'allumer et de s'éteindre de nouveau, toujours au même rythme.

L'arbre aux lumières blanches était illuminé pendant onze minutes et éteint pendant sept minutes, avant de s'allumer et de s'éteindre de nouveau, toujours au même rythme.

Tous les jours, le premier allumage des trois arbres ensemble se faisait à 15h00 exactement.

Combien de fois, après 15h et avant minuit, les trois arbres se rallumaient-ils au même moment ? Et à quelle heure exactement ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les moments où trois événements périodiques (de périodes 12, 14 et 18 minutes) se produisent simultanément après une première coïncidence, à 15h00, jusqu'à minuit.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois arbres s'allument et s'éteignent régulièrement à partir de 15h00, mais à des rythmes différents.
- Déterminer la période entre deux allumages successifs pour chaque arbre : respectivement 12 minutes, 14 minutes et 18 minutes et en tirer les moments des allumages successifs, après 12, 24, 36, 48, … minutes depuis 15h pour le premier ; après 14, 28, 42, 56, … minutes pour le deuxième ; après 18, 36, 54, 72, 90, … minutes pour le troisième et chercher après quelle durée se produisent les allumages simultanés, de deux arbres ou directement des trois arbres.
- Ecrire toutes les illuminations successives de chacun des trois arbres (multiples de 12, de 14, de 18) jusqu'à ce qu'on en découvre une qui soit commune, ou, par voie arithmétique, chercher le plus petit multiple commun de 12, 14 et 18 : 252.
- Transformer les 252 minutes en heures et minutes (quatre heure et 12 minutes) et les additionner successivement à l'heure et du premier allumage pour pouvoir déterminer les deux différents moments d'allumage simultané après 15h00: 19h12, 23h24.

Ou écrire les horaires complets des trois allumages de 15h à minuit et observer à quels moments ils sont simultanés.

Niveaux: 5, 6, 7

Origine: Parma

11. LES PIECES DE MONNAIE (Cat. 5, 6, 7, 8)

CLASSE : SR - ________

Julie possède 20 pièces de monnaie : un mélange de pièces de 1 € et de pièces de 2 €.

Si on remplaçait ses pièces de 1 € par des pièces de 2 € et ses pièces de 2 € par des pièces de 1 €, elle aurait 4 € de plus.

Combien Julie a-t-elle d'euros avec ses 20 pièces ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Résoudre un système « élémentaire » de deux équations linéaires à deux inconnues avec des nombres naturels dans un contexte d'échange de pièces de monnaie.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : il y a deux nombres de pièces, de 1 € et de 2 € (qu'il faudra déterminer), dont la somme est 20 et dont la valeur totale n'est pas connue. Si on intervertit les nombres de pièces de chaque type, la valeur totale vaudra 4 € de plus.
- Passer aux relations arithmétiques correspondantes en respectant les contraintes pour trouver chaque fois la valeur totale (multiplications par 1 ou par 2 et additions), puis addition de 4 pour passer de la première à la deuxième somme et finalement vérifier si ces sommes se retrouvent en échangeant les nombres de pièces.
- Si par exemple on choisit un nombre de pièces de 1 €, (7) il faut calculer le nombre de pièces de 2 € par différence du premier et de 20, $(20 – 7 = 13)$ puis calculer la somme dans le premier cas $(7 \times 1) + (13 \times 2) = 33$, puis la somme en intervertissant le nombre de pièces $(13 \times 1) + (7 \times 2) = 27$, puis comparer les deux sommes et vérifier que la seconde vaut 4 de plus que la première $(33 – 27 = 6$, à rejeter).

  La solution apparaît avec l'essai de 12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2 € $(12 \times 1) + (8 \times 2) = 28$ et $(8 \times 1) + (12 \times 2) = 32 = 28 + 4$

Il faut encore se rendre compte que d'autres essais sont inutiles et noter la réponse : Julie a $8 \times 2 + 12 \times 1 = 28$ €.

Pour limiter les essais on peut se rendre compte par exemple, au cours des premières tentatives, qu'il doit y avoir plus de pièces de 1 € que de 2 € pour que la somme augmente.

Ou, par un raisonnement qui évite les essais si l'on se rend compte que, chaque fois que l'on remplace une pièce de 1 € par une pièce de 2 € on gagne 1 euro sur la somme totale. On peut alors en déduire que le gain de 4 € sera dû au remplacement de 4 pièces de 1 € par une pièce de 2 €, et qu'il y a 4 pièces de 1 € de plus que de pièces de 2 €. Les 16 autres pièces se répartissent donc en 8 pièces de 1 € et 8 pièces de 2 €, dont l'échange ne modifie pas l'avoir de Julie.

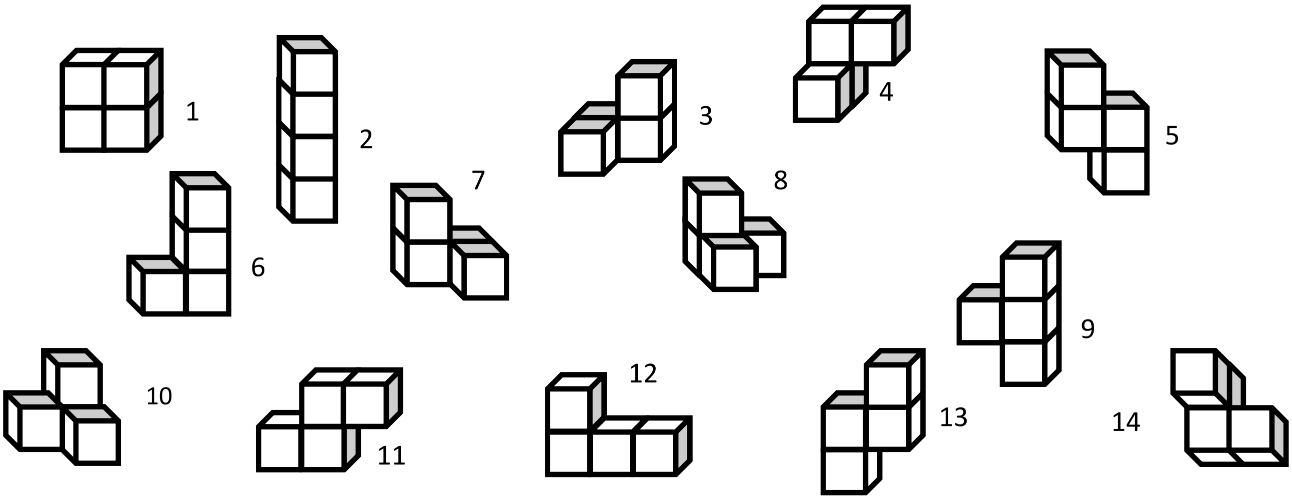
Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : FC

12. TÉTRACUBES (cat. 6, 7, 8)

CLASSE : SR - _________

Mauro a quatre cubes aimantés qu'il assemble face contre face pour former des tétracubes. Chaque fois qu'il a fait un tétracube, il le dessine puis détache les quatre cubes pour refaire un nouveau tétracube.
Voici ses dessins :



En regardant ses dessins, Mauro se rend compte qu'il a représenté plusieurs fois un même tétracube.

Combien Mauro a-t-il dessiné de tétracubes différents ?

Pour chaque tétracube différent, donnez les numéros des dessins qui le représentent.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconnaître, parmi 14 dessins de tétracubes, ceux qui représentent le même tétracube et faire la liste des tétracubes différents.

Analyse de la tâche

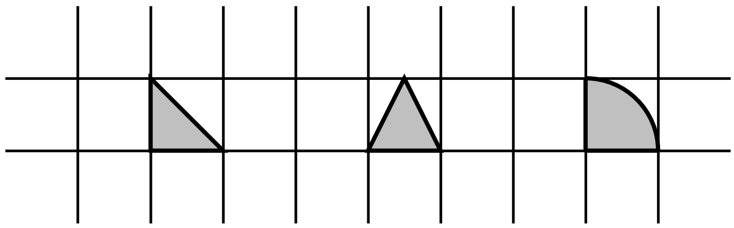
- Observer les dessins et se rendre compte que certains représentent le même tétracube mais avec une orientation différente dans l'espace.
- Dresser l'inventaire des différents tétracubes en repérant tout d'abord les plus « faciles » à identifier.
  Par exemple, ceux dont les quatre cubes peuvent être disposés dans un même plan :
  a) l'alignement des 4 cubes, en forme de « I » (2), b) les alignements de 3 cubes en forme de « L » (6 et 12),
  c) les alignements de 3 cubes en forme de « T » (9) ; d) 2 alignements parallèles de 2 cubes en forme de carré (1)
  e) 2 alignements parallèles de deux cubes en forme de « S » (5, 11 et 13).
- Parmi les six tétracubes dont les quatre cubes ne peuvent se situer dans un même plan,
  f) deux alignements orthogonaux de deux cubes (3 et 14)
  g) deux alignements orthogonaux de deux cubes (4 et 7)
  h) un seul alignement de deux cubes : un cube « central » et les trois autres sur trois de ses faces (8 et 10)
  Ce sont les catégories f) et g) les plus difficiles à distinguer, leurs tétracubes sont symétriques par rapport à un plan, comme une chaussure droite et une chaussure gauche par exemple.

Niveaux : 6, 7, 8

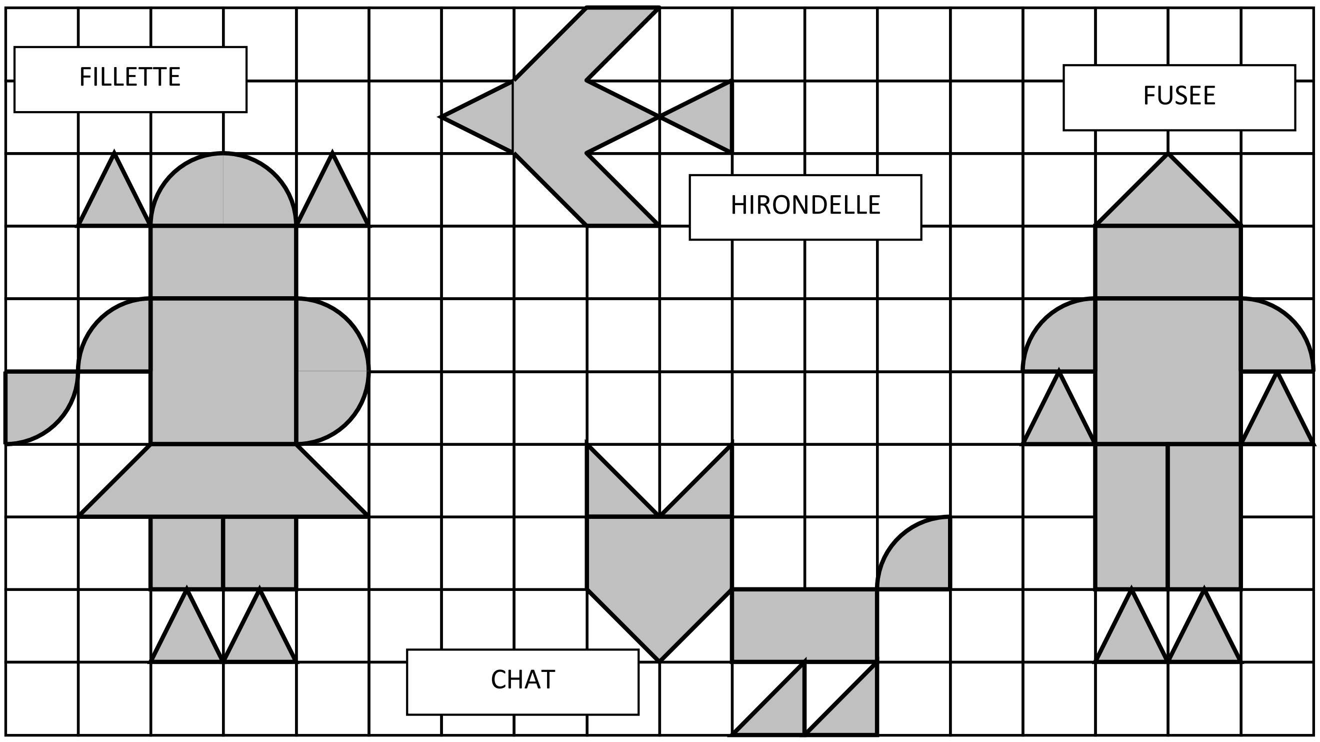
Origine: Udine

13. PIECES MAGNETIQUES (Cat. 6, 7, 8) **CLASSE : SR -** ________

Pour jouer sur un panneau métallique sur lequel est dessiné un quadrillage, ont été utilisées uniquement des pièces magnétiques de ces trois types :



Ces trois types de formes ont été utilisés pour obtenir les figures que vous voyez reproduites ci-dessous : une FILLETTE, une HIRONDELLE, un CHAT et une FUSEE.



Ont été dépensés :

- 18,20 € pour l'acquisition des pièces magnétiques qui composent la FILLETTE,
- 7,80 € pour les pièces magnétiques qui composent le CHAT,
- 15,00 € pour celles de la FUSEE.

Combien a été dépensé pour les pièces magnétiques de l'HIRONDELLE ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de trois compositions différentes obtenues en utilisant un certain nombre de pièces de trois formes différentes et en connaissant le prix en euro de chacune des compositions, déterminer le coût d'une quatrième composition réalisée en utilisant seulement deux des trois types de pièces (ce qui revient à résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues).

Analyse de la tâche

- Observer les trois pièces en distinguant les deux types de triangles : un triangle rectangle isocèle, moitié d'un carré du quadrillage ; un triangle isocèle avec une base coïncidant avec un côté du quadrillage ; un secteur circulaire correspondant à un quart de cercle avec un rayon égal au côté du quadrillage.
- Comprendre qu'il est nécessaire d'examiner les figures pour déterminer combien de pièces de chaque type sont utilisées. Remarquer qu'il est nécessaire d'utiliser deux pièces « triangle rectangle isocèle » pour obtenir les éléments carrés des figures. Reconnaître ainsi, par exemple, que la tête de la fillette est formée avec deux pièces en triangle isocèle (les tresses), deux pièces d'¼ de cercle, et quatre pièces en forme de triangle rectangle isocèle (le rectangle de deux carrés).
- Décrire les images en fonction du nombre et du type de pièces utilisées :
  - FILLETTE : 22 pièces « triangle rectangle isocèle », 6 pièces « quart de disque » et 4 pièces « triangle isocèle »
  - CHAT : 14 pièces « triangle rectangle isocèle », 1 pièce « quart de disque »
  - FUSEE : 22 pièces « triangle rectangle isocèle », 2 pièces « quart de disque » et 4 pièces « triangle isocèle »
  - HIRONDELLE : 6 pièces « triangle rectangle isocèle » et 3 pièces « triangle isocèle ».
- Se rendre compte que la différence de prix des compositions dépend du nombre et du type de pièces utilisées dans chacune, et que par conséquent il est nécessaire de passer à une comparaison entre les figures. Comprendre que la figure de la fillette diffère de celle de la fusée de 4 pièces « quart de disque » et trouver ensuite que le coût d'une pièce de ce type est de 0,80 € [(18,20 - 15,00): 4]. De l'information sur la figure du chat, tirer en conséquence que le coût d'une pièce "triangle rectangle isocèle" est de 0,50 € [(7,80 - 0,80): 14].
- Pour trouver le coût pour l'hirondelle, il faut encore déterminer le prix d'une pièce « triangle isocèle ». Cette dernière valeur peut être déduite des informations sur la fillette, ou celles de la fusée, par la différence entre le coût total et celui des pièces, « triangle rectangle isocèle » et « quart de cercle », dont on a déjà trouvé le coût. Le résultat est qu'une pièce « triangle isocèle » coûte 0,60 € (par exemple, en se basant sur la fillette, le calcul est donné par: [18,20 - (11 + 4,80): 4] = 0,60).
- Déduire enfin que le coût des pièces pour l'hirondelle est de 4,80 € [6 × 0,50 + 3 × 0,60].

Ou remarquer que le chat n'est constitué que de deux sortes de pièces, 14 pièces « triangle rectangle isocèle » et 1 seul « quart de disque ». Le coût étant de 7,80 €, imaginer que chaque pièce « triangle rectangle isocèle » coûte 0,50 € et que l'autre coûte 0,80 € (lien fort entre 7 et 14). Vérifier ensuite que, à partir de ces données, un même prix est trouvé pour la pièce « triangle isocèle » pour la fillette et la fusée : 0,60 €. Calculer ensuite le coût de l'hirondelle : 4,80 €.

Ou, considérant que le triangle rectangle est la moitié d'un carré; et que la figure du chat est composé de 7 carrés, émettre l'hypothèse qu'un carré coûte 1 euro et que le quart de disque coûte 0,80 euro. Vérifier l'hypothèse sur la figure de la fillette composée de 11 carrés, 6 quarts de disque et 4 triangles isocèles. De (18,20 - 1580) : 4 = 0,60 on tire le coût d'un triangle isocèle. Une dernière vérification sur la figure de la fusée confirmera l'hypothèse et permet de calculer le prix de la figure de l'hirondelle.

Ou résoudre le système d'équations :

(1) $6q + 22tr + 4ti = 18{,}20$

(2) $1q + 14\,tr = 7{,}80$

(3) $2q + 22tr + 4ti = 15$

qui a pour solution q = 0,80€, tr = 0,50€ et ti = 0,60€. Calculer ensuite le prix des pièces de l'hirondelle qui est de 4,80 €.

Niveau: 6, 7, 8

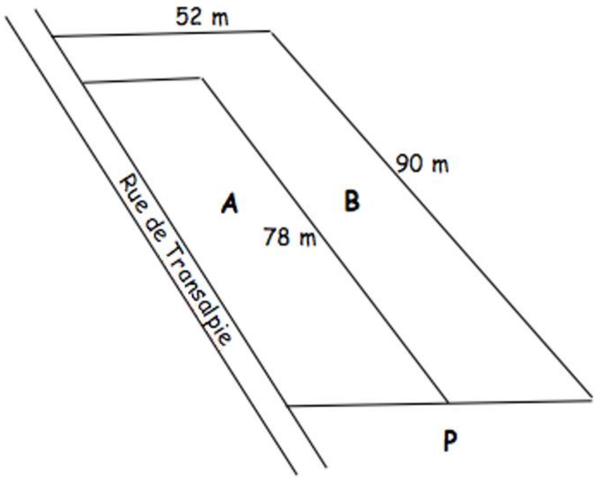
Origine: Siena

14. PARTAGE D'UN TERRAIN (Cat. 6, 7, 8)

CLASSE : SR - __________

Pierre et Marie ont acheté un terrain rectangulaire situé en bordure de la rue de Transalpie et l'ont fait partager en deux parcelles A et B de même aire.

Pour laisser le passage de la parcelle B vers la rue, le géomètre a partagé ainsi le terrain : la parcelle A est rectangulaire (de 78 m de longueur) et la parcelle B a une forme en L.



A quelle distance de la rue le géomètre a-t-il placé le poteau P pour que les deux parcelles aient la même aire ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

A partir d'une représentation en perspective de deux rectangles de longueurs données, déterminer leurs largeurs de façon à ce que l'aire du petit soit la moitié de celle du grand.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le dessin est un schéma en perspective ne permettant pas d'y faire des mesures et que la réponse devra être obtenue par un calcul, que les grands côtés des parcelles A et B sont parallèles au chemin, les petits côtés des parcelles sont perpendiculaires au chemin ; et que la distance de P au chemin est la largeur de A.
- Constater que l'aire totale se calcule facilement (rectangle de 90 × 52), qu'on pourra en déduire les deux parties égales, dont A, qui est un rectangle dont on connaît la longueur et l'aire et dont on pourra calculer la largeur.
- Effectuer les calculs correspondant : aire totale du terrain : 90 × 52 = 4680, parties A et B 4680 : 2 = 2340 (en m^2)
  largeur de la partie A: 2340 / 78 = 30 (en m)
- En déduire la position du poteau P à 30 m du bord de la rue de Transalpie

Ou bien,

- Décomposer par exemple la parcelle B en un rectangle de 78 m sur 52 m et un autre, pour le passage, de 52 m de 12 m.
  (90 – 78 = 12), dont l'aire est : 52 × 12 = 624 m^2. L'aire du rectangle restant est 78 × 52 = 4056 m^2
- En déduire que l'aire de A correspond à la moitié de ce dernier rectangle de largeur 26 et à la moitié du passage de largeur (624 :2) : 78 = 4 m.

Ou, par voie algébrique, exprimer l'aire de la parcelle A en fonction de sa largeur l : 78 l . ; celle de B en 624 + 78 × (52 – l) et obtenir l'équation en l : 78 l = 624 + 78 × (52 – l) dont la solution est 30.

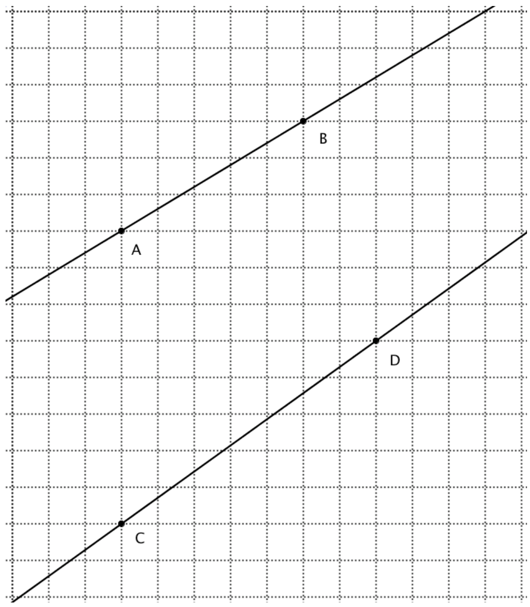
Niveaux : 6, 7, 8

Origine : F-C

15. INTERSECTION (Cat 7, 8)

CLASSE : SR - __________

André trace deux droites sur une feuille quadrillée, l'une passant par A et B, l'autre par C et D, (comme vous le voyez sur ce dessin).



Il remarque que si on prolonge ces deux droites, sur une feuille quadrillée beaucoup plus grande, les deux droites vont se couper.

Où se situe ce point d'intersection ?

(Donnez sa position en indiquant de combien de carreaux il faut se déplacer vers la droite et vers le haut depuis C.)

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les coordonnées de l'intersection de deux droites déterminées chacune par deux points ; les quatre points étant donnés sur un quadrillage, l'intersection se situant hors de la feuille.

Analyse de la tâche

- Voir que la droite (AB), à partir de A, « monte » de 3 carrés pour un déplacement horizontal vers la droite de 5 carrés et que la droite CD, à partir de C « monte » de 5 carrés pour un déplacement horizontal de 7 carrés. Voir qu'entre A et C, il y a un « écart » de 8 carrés.
- A partir de ces observations, dessiner les droites sur une feuille quadrillée plus grande ou les prolonger sur d'autres feuilles et constater que cette procédure exige beaucoup de précision pour trouver les coordonnées du point d'intersection, par exemple en marquant progressivement tous les points de la droite (AB) qui sont sur les intersections du quadrillage (de 5 en 5 selon les abscisses) et en vérifiant les points correspondants de la droite (CD) de même abscisse.

Ou, par voie arithmétique, calculer que pour un déplacement de 35 (ppmc de 5 et 7) carrés vers la droite, la droite (AB) « monte » de 21 (7 × 3) carrés, et la droite (CD) « monte » de 25 (5 × 5) carrés, donc que les deux droites se sont « rapprochées » de 4 (25 – 21) carrés.

- Voir alors qu'il faut donc encore se déplacer de 35 carrés horizontalement vers la droite pour que les droites se rejoignent (car les points A et C sont distants de 8 carrés). Le point d'intersection est donc à 70 carrés à « droite » de C et à 50 carrés plus « haut » que C.

Ou, par voir algébrique, déterminer l'intersection des deux droites dans un système d'axes orthonormés. Par exemple avec le point C comme origine les équations des droites (CD) et (AB) sont : $y = 5/7x$ et $y = 3/5x + 8$ dont la l'intersection est (70 ; 50).

Niveau: 7, 8

Origine: Suisse Romande

16. JARDIN CARRÉ (Cat. 7, 8) **CLASSE : SR - _________**

César possède un terrain carré. Une partie de ce terrain, carrée elle aussi, est réservée au jardin potager. L'aire de la surface qui reste est 75 (en m^2).

Quelles sont les mesures possibles des côtés du terrain et des côtés du potager en sachant que ces deux mesures sont des nombres entiers.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI:

Tâche mathématique

- Trouver les couples de nombres naturels dont la différence entre leurs carrés est 75, dans un contexte de terrains carrés.

Analyse de la tâche

- Se représenter les deux carrés sachant seulement que le deuxième est « une partie » du premier; c'est-à-dire que l'un est « entièrement » contenu dans l'autre (côtés parallèles ou non). Surmonter cette incertitude sur les positions relatives et comprendre que la recherche demandée ne fait appel qu'aux deux aires encore inconnues des deux carrés aux 75 m^2 de la surface qui reste.

  Passer aux relations arithmétiques entre ces trois aires et reformuler le problème en la recherche de deux nombres dont la différence est 75.
- Prendre en compte la formule de l'aire du carré et l'exigence des mesures entières des côtés pour restreindre le problème, dans l'ensemble des nombres naturels à la recherche de deux carrés (nombres) dont la différence est 75.
- On peut procéder par voie arithmétique par essais organisés, par exemple à partir des aires successives du petit carré 1, 4, 9, 16, 25, calculer les aires correspondantes du grand qui vaut 75 de plus et vérifier si ce grand est un carré : (1 ;76), (4 ; 79), (9 ; 84), (16 ; 91) , (25 ; **100**) ou $5^2 = 25$; $100 = 10^2$) , ne pas s'arrêter là et continuer …(81 ; 156), (100 ; 175), (11^2 = 121 ; **196 =** 14^2), … (37^2 = **1369** ; **1444** = 38^2). On constate qu'il faut s'arrêter là car la différence entre deux carrés successifs de nombres supérieurs à 38 sera supérieure à 75.

  Dans cette procédure par essais, la tâche exige une recherche progressive et un contrôle systématique de chaque nouveau couple, avec calculatrice, ainsi qu'une perception de la progression de la différence entre deux carrés successifs (il est probable que la solution 37 et 38 n'apparaisse pas dans cette procédure et que les essais aillent au-delà).
- La procédure algébrique consiste à résoudre l'équation $x^2 - y^2 = 75$, puis à la transformer en $(x - y)(x + y) = 75$ et trouver les trois couples (de diviseurs de 75) dont le produit est 75 : 1×75 ; 3×25 et 5×15 pour en tirer les solutions 37 et 38 ; 11 et 14 ; 5 et 10. (Mais on sait bien que cette procédure n'est à disposition que du professeur ou d'élèves qui maîtrisent les équations, les identités remarquables, les factorisations, …)
- Une procédure peut aussi être envisagée à partir de considérations géométriques sur le petit carré (de côté a) et le grand (de côté $a + b$) dont les aires sont respectivement a^2 et $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et dont la différence est représentée par un carré b^2 et deux rectangles ab. Cette différence $2ab + b^2$ peut s'écrire $b(2a + b) = 75$ par factorisation. On en tire les trois valeurs de b (diviseurs de 75) : 1, 3 et 5 donnant les trois valeurs positives de a : 37, 11 et 5 et les 3 valeurs correspondantes de $a + b$: 38, 14 et 10 donnant les mesures des deux carrés : (38 et 37 m; 14 et 11 m, 10 et 5 m).

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

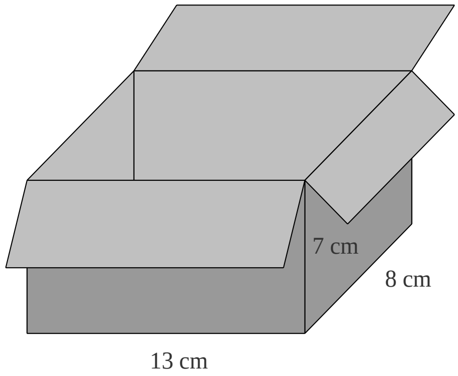
17. LA BOÎTE DE CUBES (Cat. 8)

CLASSE : SR - __________

François a une boîte en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 13 cm, 8 cm et 7 cm.
Il dispose de nombreux cubes en bois,
les uns de 2 cm d'arête, les autres de 1 cm d'arête.
François veut remplir complètement la boîte avec le moins possible de cubes.

Combien doit-il en mettre de chaque sorte ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer un parallélépipède rectangle de dimensions données en un minimum de cubes de 1 et de 2 cm d'arêtes

Analyse de la tâche

- Même si le calcul du volume de la boîte divisé par le volume d'un cube de 2 cm d'arête donne un résultat entier (728 : 8 = 91), se rendre compte qu'on ne peut pas remplir complètement la boîte en utilisant uniquement des cubes de 2 cm d'arête.
- Constater qu'on peut mettre au maximum 72 cubes de 2 cm d'arête dans la boîte (6 × 3 × 4 = 72) ou (12 × 8 × 6) : 8 = 72).
- Se rendre compte que pour remplir la boîte on doit ajouter des cubes sur la longueur et sur la hauteur.
- Plusieurs méthodes sont envisageables pour trouver le nombre de cubes de 1cm d'arête :

  calculer le volume du parallélépipède (728 cm^3) et celui occupé par les cubes de 2 cm d'arête (72 × 8 = 576 cm^3), faire la différence (728 - 576) et trouver que 152 cm^3 est le volume occupé par les cubes de 1cm d'arête ; comprendre que 152 exprime aussi le nombre de cubes de 1 cm d'arête ;

  ou bien, compter directement les cubes de 1 cm d'arête : la dernière couche dans la hauteur (7 est un nombre impair) 13 × 8 et la dernière « paroi » dans la longueur (13 est un nombre impair) 7 × 8 et en retirant les 8 cubes communs à la couche et la « paroi » 7 × 8 + 13 × 8 = 160; 160 – 8 = 152.

  ou bien, représenter une couche (par exemple formée de 6 × 4 = 24 cubes de 2 cm d'arête et de 8 × 2 = 16 cubes de 1 cm d'arête) répétée trois fois, puis une dernière couche 13 × 8 = 104 cubes, pour un total de 16 × 8 + 104 = 152 cubes de 1 cm d'arête.

Niveau : 8

Origine : Reprise du problème 16.2.12 (cat. 6, 7)