

Titre	Catégories	Ar	Alg	Géo	Lo/Co*	Origine
1. Les châtaignes de Charles I	3 4	x				BL
2. Comment s'habiller	3 4				x	CB
3. Le pavage de Claire	3 4				x	GE
4. C'est le printemps !	3 4 5	x				9.F.1
5. Triangles envolés	3 4 5 6			x		BB
6. La tarte de mamie Lucie	4 5 6			x		PR
7. Le bouquet de fleurs	5 6	x			x	MI
8. Une famille d'Elfes	5 6	x				BL
9. Les châtaignes de Charles II	5 6 7	x				BL
10. Les marques noires	5 6 7			x	x	RV
11. Au musée	6 7 8 9 10	x				Gr. alg
12. Héritage à partager	7 8	x		x		FC
13. Partage équitable	7 8 9 10			x		FC
14. À la Pizzeria	7 8 9 10	x				PR
15. Thé entre amies	7 8 9 10	x		x		RV
16. Le paquet de Claire	8 9 10			x		SS
17. Nombres magiques	8 9 10	x	x			FC
18. Les deux cercles	9 10			x		Gr. 0 ⁰

*Ar : arithmétique

Alg : algèbre

Geo : géométrie

Lo/Co : logique et combinatoire

Titre	Catégories	Thèmes	Origine
1. Les châtaignes de Charles I	3 4	Arithmétique : somme et double	BL
2. Comment s'habiller	3 4	Combinatoire d'un ensemble à trois éléments	CB
3. Le pavage de Claire	3 4	Compléter un pavage, dénombrements	GE
4. C'est le printemps !	3 4 5	Décomposer 40 en somme de 5 termes avec contraintes	9.F.1
5. Triangles envolés	3 4 5 6	Décomposer un triangle rectangle isocèle en 9 triangles égaux	BB
6. La tarte de mamie Lucie	4 5 6	Aires des triangles formés par les deux diagonales d'un rectangle	PR
7. Le bouquet de fleurs	5 6	Décomposer 15 en une somme de quatre nombres différents	MI
8. Une famille d'Elfes	5 6	Trouver un entier entre 990 et 1000 divisible par 2 et par 3	BL
9. Les châtaignes de Charles II	5 6 7	Répartir 81 en quatre nombres proportionnels à 1, 2, 4 et 2	BL
10. Les marques noires	5 6 7	Choix de deux cases sur neuf d'une grille 3x3	RV
11. Au musée	6 7 8 9 10	Solution d'une équation du premier degré par arithmétique ou algèbre	Gr. alg
12. Héritage à partager	7 8	Aires de triangles et partage proportionnel	FC
13. Partage équitable	7 8 9 10	Partage d'un trapèze isocèle en deux parties de même aire	FC
14. À la Pizzeria	7 8 9 10	Partage d'une remise proportionnellement à 3 nombres	PR
15. Thé entre amies	7 8 9 10	Rétablir l'heure réelle au vu du reflet d'une pendule dans un miroir	RV
16. Le paquet de Claire	8 9 10	Dimensions d'un parallélépipède rectangle de volume maximal	SS
17. Nombres magiques	8 9 10	Opérations sur la décomposition décimale d'un nombre	FC
18. Les deux cercles	9 10	Distance entre deux cercles concentriques, différence de leurs longueurs donnée	Gr 0 ⁰

1. LES CHATAIGNES DE CHARLES (I) (Cat. 3, 4)

Charles a récolté beaucoup de châtaignes. Il en a déjà rempli 3 paniers, un petit, un moyen et un grand. Il lui reste encore des châtaignes, elles pèsent 18 kilos, exactement comme celles qui sont dans le panier moyen.

Les châtaignes qui sont dans le panier moyen pèsent le double de celles qui sont dans le petit panier et les châtaignes qui sont dans le grand panier pèsent le double de celles qui sont dans le panier moyen.

Combien de kilos de châtaignes Charles a-t-il récoltés en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Calculer la somme des quatre nombres : 18, 18, la moitié de 18 et le double de 18.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a deux nombres à trouver : les poids des châtaignes contenues dans le grand et le petit panier, sachant que le moyen en contient 18 kg.
- Comprendre que les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du moyen : $18 \times 2 = 36$ kg.
- Comprendre que les châtaignes du petit panier pèsent la moitié de celles du moyen : $18 / 2 = 9$ kg.
- Comprendre qu'il faut faire la somme des trois nombres $9 + 18 + 36$ pour trouver le poids des châtaignes contenues dans les trois paniers : 63 kg.
- Sachant qu'il reste 18 kg de châtaignes après avoir rempli les trois paniers, calculer le poids des châtaignes que Charles a récoltées : $63 + 18 = 81$ kg.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (81 kg) avec la liste des opérations effectuées
- 3 Réponse exacte avec une liste partielle des opérations effectuées
ou, réponse correcte pour chaque panier (9 kg, 18 kg, 36 kg) avec totalisation oubliant le reste (réponse 63 kg), avec explications
- 2 Réponse correcte pour chaque panier (9 kg, 18 kg, 36 kg) sans totalisation
ou totalisation des 3 paniers seulement (63 kg), sans explications
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, avec le détail des opérations
- 1 Réponse correcte pour chaque panier sans explication
ou début de recherche traduisant la prise en compte de certaines relations entre les contenus des paniers et le reste.
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Belluno

2. COMMENT S'HABILLER ? (Cat. 3, 4)

Laura est en vacances pour deux semaines. Sa maman a mis dans sa valise :

- trois tee-shirts, un jaune, un bleu et un rouge,
- deux pantalons, un gris et un blanc,
- deux paires de chaussures : une paire de baskets et une paire de sandalettes.

Laura a envie de s'habiller chaque jour d'une tenue différente des autres jours (tee-shirt, pantalon et paire de chaussures).

Pourra-t-elle mettre une tenue différente pour chaque jour de ses vacances ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Trouver le nombre d'ensembles de trois éléments dans lesquels le premier est un tee-shirt à choisir parmi trois, le deuxième un pantalon parmi deux et le troisième une paire de chaussures à choisir parmi deux paires.

Analyse de la tâche

- Comprendre, même sans connaître les règles de calcul de la combinatoire, de combien de façons différentes on peut associer les divers éléments.
- Considérer que chacun des trois tee-shirts peut être porté avec le pantalon gris ou avec le pantalon blanc et donc qu'il y a $6 = 3 \times 2$ combinaisons possibles. Chacune d'elles peut être associée aux baskets ou aux sandalettes, donc Laura pourra s'habiller de $12 = 6 \times 2$ façons possibles.

Ou bien, dessiner ou énoncer toutes les combinaisons possibles.

- | | |
|--|--|
| 1) pantalon gris / tee-shirt rouge / baskets | 7) pantalon blanc / tee-shirt rouge / baskets |
| 2) pantalon gris / tee-shirt rouge / sandalettes | 8) pantalon blanc / tee-shirt rouge / sandalettes |
| 3) pantalon gris / tee-shirt jaune / baskets | 9) pantalon blanc / tee-shirt jaune / baskets |
| 4) pantalon gris / tee-shirt jaune / sandalettes | 10) pantalon blanc / tee-shirt jaune / sandalettes |
| 5) pantalon gris / tee-shirt bleu / baskets | 11) pantalon blanc / tee-shirt bleu / baskets |
| 6) pantalon gris / tee-shirt bleu / sandalettes | 12) pantalon blanc / tee-shirt bleu / sandalettes |

- Conclure que Laura ne pourra s'habiller que de 12 manières différentes et ne pourra pas mettre une tenue différente chacun des 14 jours de ses deux semaines de vacances.

Attribution des points

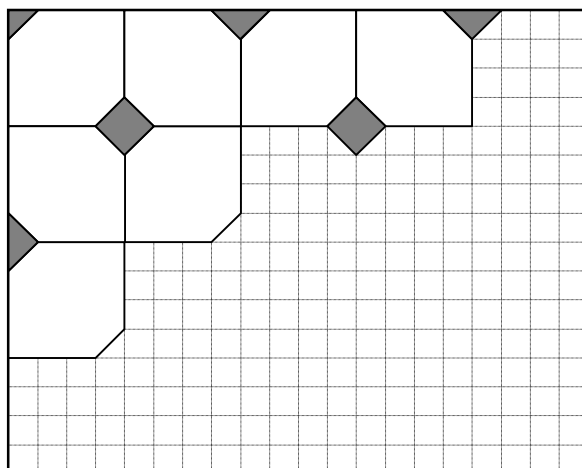
- 4 Réponse correcte « non », avec des explications claires (liste organisée ou calculs) indiquant qu'il n'y a pas assez de tenues différentes ou montrant qu'il n'y en a que 12
- 3 Réponse correcte « non », avec une liste comportant une seule erreur, 11 possibilités sans répétition ou 13 possibilités sans omission
- 2 Réponse correcte, « non », expliquant le nombre (12) de toutes les possibilités sans liste complète ou une liste avec deux ou trois répétitions ou omissions ou réponse « oui » avec un inventaire de 14 tenues (deux répétitions)
- 1 Réponse « non » sans explication ou réponse « oui » avec une liste de plus de 14 tenues (avec plus de deux répétitions)
- 0 Incompréhension du problème ou moins de 6 combinaisons

Niveaux : 3, 4

Origine : Campobasso

3. LE PAVAGE DE CLAIRE (Cat 3, 4)

Claire a commencé à carrelers sa salle de bains avec deux types de carreaux, des blancs et des gris, Comme vous le voyez sur le dessin



Les carreaux blancs sont tous de la même forme et de la même grandeur.

Les carreaux gris sont carrés. Claire doit en découper certains en deux ou en quatre parties pour les placer sur les bords et dans les coins. Claire a vu qu'elle allait utiliser tous les morceaux gris.

Combien de carreaux gris sont-ils nécessaires pour carrelers toute la salle de bains comme sur la figure ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

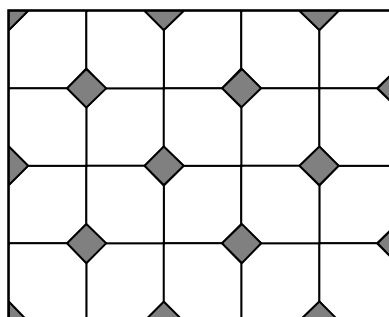
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Terminer un pavage sur quadrillage composé d'hexagones et de carrés. La trame principale est constituée d'hexagones (inscrits dans des carrés de 4×4) qui laissent la place pour des carreaux gris, carrés, dont certains, sur les bords et dans les coins, sont découpés. Compter le nombre de carreaux gris en regroupant les parties de façon à avoir des carreaux entiers.

Analyse de la tâche

- Observer les deux types de carreaux. Le blanc peut être considéré comme un « carré » de 4×4 privé deux coins qui sont des demi-carrés de la grille ; le gris est un carré disposé « sur la pointe » et pouvant être découpé en deux ou quatre triangles pour compléter les bords et les coins de la salle de bains.
- Dessiner les carreaux (ou leur contour), selon les régularités observées.



- Compter les carreaux gris et les différentes parties : 6 entiers, 7 moitiés et 2 quarts. Regrouper les moitiés et les quarts pour obtenir des entiers (10).

Ou bien : on peut arriver à la solution en considérant les 20 carreaux carrés blancs auxquels il manque deux quarts des carrés gris, c'est-à-dire la moitié d'un carré gris pour chaque carré blanc, donc l'équivalent de 10 carrés gris.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (10) avec explications claires (dessin correct et détail du raisonnement qui justifie le nombre de carrés gris)
- 3 Réponse correcte (10) avec un dessin correct sans explications
- 2 Réponse correcte (10) avec un dessin peu clair ou avec un dessin incomplet sans explication
ou réponse erronée à cause d'une erreur de comptage avec un dessin correct et sans explication
- 1 Début du dessin correct (au moins 4 carreaux dessinés correctement)
ou dessin erroné et réponse cohérente avec les dessins
ou réponse correcte sans dessin ni explication
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4**Origine :** Genova

4. C'EST LE PRINTEMPS ! (Cat. 3, 4, 5)

Anne a acheté 40 bulbes de tulipe à planter dans les pots de son balcon : deux grands pots et trois petits. Elle commence à mettre le même nombre de bulbes dans les cinq pots et ensuite, dans chacun des grands, elle en met 10 en plus.

Combien de bulbes de tulipe Anne a-t-elle planté dans chaque pot ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique :**

- Décomposer 40 en somme de cinq termes, avec deux termes égaux entre eux et trois autres qui valent chacun 10 de plus : $40 = 5 \times \dots + 20$

Analyse de la tâche :

- Procéder par essais non organisés, permettant d'arriver à la solution.

Ou bien :

- Comprendre que les grands pots contiennent le même nombre de bulbes et que les petits pots contiennent un même nombre de bulbes différent du précédent.
- Comprendre que dans les grands pots il y a au moins 11 bulbes, puisqu'il y a 10 bulbes de plus que le nombre de bulbes contenus dans les petits pots.
- Organiser une recherche systématique. Commencer à mettre dans les deux grands pots 11 bulbes. Cela fait donc 22 bulbes. Soustraire des 40 bulbes ces 22 bulbes. Il en reste 18 pour les petits pots, ce qui peut se diviser pour 3, et conclure qu'on peut mettre 6 bulbes dans chaque petit pot. Cette solution n'est cependant pas valable, parce qu'entre 6 et 11 il n'y a pas la différence de 10.
- Essayer alors avec 12, puis avec 13, mais s'apercevoir que dans les deux cas le nombre des bulbes qui restent n'est pas divisible par 3.
- Essayer avec 14 et trouver qu'il reste 12 bulbes, qui est divisible par 3. Donc dans chaque petit pot, on peut mettre 4 bulbes. La solution est valable parce que la différence entre le nombre de bulbes contenus dans les deux types de pots est 10.
- Continuer cette recherche pour être sûr qu'il n'y a pas d'autres solutions, ou bien s'arrêter ici en observant explicitement qu'en augmentant le nombre de bulbes, la différence sera toujours supérieure à 10.

Ou bien :

- Comprendre qu'en enlevant 10 bulbes de chaque grand pot, il reste $40 - 20 = 20$ bulbes à répartir en 5 pots. En déduire qu'il y a 4 bulbes dans chaque petit pot et 14 dans chaque grand pot.

Attribution des points :

- 4 Réponse correcte (14 bulbes dans les grands pots et 4 bulbes dans les petits pots) avec une procédure explicitée ou avec les détails des essais qui montrent l'organisation d'une recherche systématique assurant l'unicité de la solution
- 3 Réponse correcte, mais avec une procédure peu claire ou insuffisamment explicitée ou seulement une vérification
- 2 Procédure correcte, mais une erreur de calcul ou une réponse correcte sans explication
- 1 Début de recherche correcte
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : 9.F.1 I gettoni

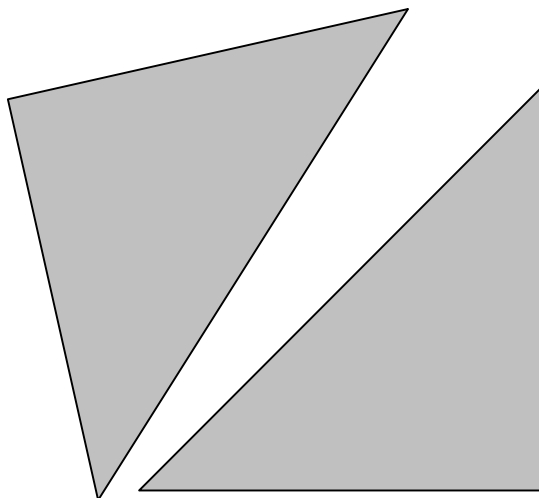
5. TRIANGLES ENVOLÉS (Cat. 3, 4, 5, 6)

Albert avait un carré de carton gris.



Le carré d'Albert

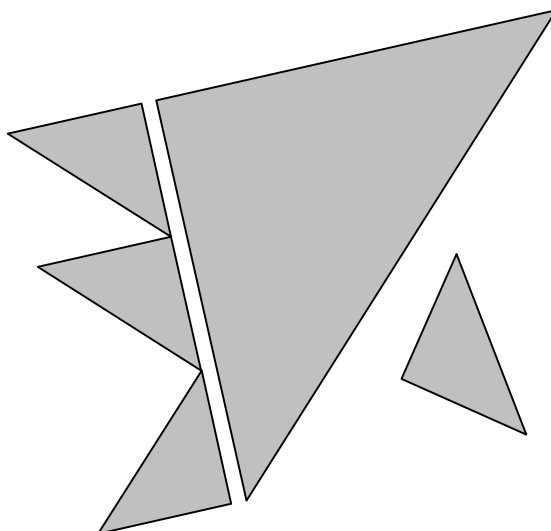
Il l'a découpé en deux triangles égaux:



Les deux triangles

Puis Albert a découpé un des deux triangles en petits triangles tous égaux.

Mais le vent a emporté quelques-uns des petits triangles. Il n'en reste plus que quatre :



Sur la figure ci-dessus, on voit que l'on peut aligner exactement trois des petits triangles égaux sur un côté du grand triangle.

Dessinez sur le carré d'Albert le grand triangle restant et tous les petits triangles.

Combien de petits triangles se sont-ils envolés ?

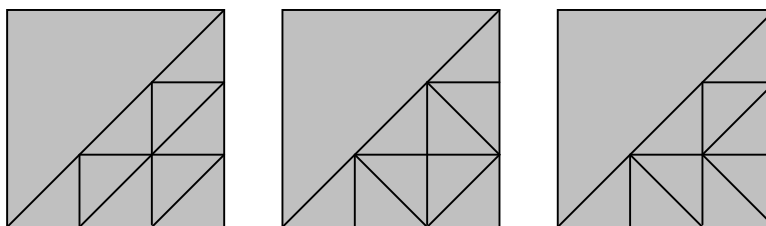
ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Décomposer un triangle rectangle isocèle en triangles égaux entre eux qui lui sont semblables dans le rapport $1/3$ et en déterminer le nombre.

Analyse de la tâche

- Percevoir les caractéristiques des triangles d'après les figures et le texte : ce sont tous des triangles rectangles isocèles, les longueurs des côtés des grands triangles valent trois fois celles des côtés des petits triangles.
- Se rendre compte que la tâche revient à décomposer le grand triangle en petits, et qu'il faut trouver combien on peut placer de petits triangles dans le grand, afin de déterminer le nombre de ceux qui se sont envolés.
- Il y a de nombreuses manières de procéder. On peut par exemple découper des nombreux petits triangles pour recouvrir le grand triangle et découvrir qu'il contient 9 petits triangles ;

ou bien on peut dessiner une trame triangulaire sur le grand triangle (il y a plusieurs possibilités) et compter les unités



- Ou encore dessiner une trame carrée puis triangulaire sur le grand carré initial et conclure
- Faire un dessin sur le carré d'Albert et conclure qu'il y a 5 carrés manquants ($9 - 4$).

Attribution des points

- 4 Réponse correcte : « 5 triangles envolés » et un dessin précis de la répartition
- 3 Réponse correcte et un dessin imprécis de la répartition
ou réponse « 9 triangles » avec un dessin précis
- 2 Réponse « 5 triangles envolés » sans dessin
- 1 Réponse « 9 triangles » sans dessin
- 0 Autre réponse
ou incompréhension du problème

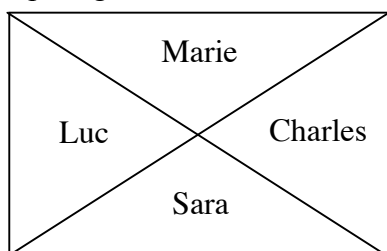
Niveaux : 3, 4, 5, 6

Origine : Bourg-en-Bresse

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

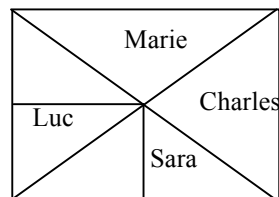
Tâche mathématique

Montrer qu'un rectangle partagé par ses deux diagonales donne quatre parties de même aire.

Analyse de la tâche

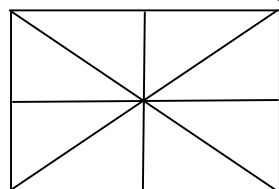
- S'assurer que les parts des deux filles sont égales, ainsi que les parts des deux garçons. (par superposition, visuelle ou manipulative, ou par symétries axiales ou centrales suivant les niveaux).
- Comparer ensuite une part d'une fille et une part d'un garçon en trouvant une unité commune d'aire.

Sans faire appel aux calculs d'aire, les élèves peuvent procéder par découpage et/ou pliage afin de constater l'égalité des aires. Par exemple, le découpage suivant montre que la moitié de la part de Luc et la moitié de celle de Sara sont deux moitiés d'un rectangle :



Les élèves peuvent aussi imaginer puis dessiner une trame sur la figure en traçant les médianes du rectangle, ce qui permet de décomposer la figure en 8 triangles égaux.

- Conclure à l'égalité des quatre parts.



Ou bien, utiliser la formule de l'aire d'un triangle en l'appliquant judicieusement : remarquer par exemple que la hauteur du triangle de Luc, issue du centre du rectangle, est égale à la moitié de la base du triangle de Sara et inversement.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Sara et Marie ont raison) avec justifications claires (découpage / pliage ou dessin d'une trame et explications, ou encore calculs utilisant la formule de l'aire d'un triangle)
- 3 Réponse correcte avec découpage ou trame mais explications incomplètes
- 2 Réponse correcte avec découpage ou trame, mais sans explications, ni calculs
- 1 Découpage ou dessin de la trame mais sans réponse
ou seulement l'affirmation que les parts de Sara et Marie sont identiques ainsi que les parts de Luc et Charles sans explication
- 0 Incompréhension du problème ou réponse fondée sur les périmètres des parts, celles des filles ayant un périmètre plus grand que celles des garçons.

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Parma

7. LE BOUQUET DE FLEURS (Cat. 5, 6)

Clara a reçu un bouquet composé de quinze fleurs. Elle constate que dans son bouquet il y a des roses, des tulipes, des marguerites et des jonquilles et que :

- Les nombres des roses, des tulipes, des marguerites, et des jonquilles sont tous différents.
- Il y a quatre fleurs d'un même type.
- Les tulipes et les marguerites forment ensemble un bouquet de six fleurs.
- Les tulipes et les jonquilles forment ensemble un bouquet de sept fleurs.

De combien de fleurs de chaque type le bouquet de Clara peut-il être composé ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 15 en une somme de quatre nombres entiers tous différents, dont l'un est 4. La somme d'un des nombres avec un des trois autres est 6 et devient 7 si on le remplace ce dernier par un autre.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut décomposer 15 en une somme de quatre entiers différents dont l'un est 4 et vérifiant les deux conditions.
- Procéder par essais organisés pour vérifier si les nombres trouvés satisfont aux conditions.
- Par exemple, en partant de la troisième condition, énumérer toutes les couples possibles de nombres dont la somme est 6 (marguerites et tulipes). Puis, d'après la quatrième condition, trouver les nombres correspondants des jonquilles. Ensuite, sur la base de la première condition, insérer le nombre 4 dans les ensembles où il n'est pas présent. Enfin, vérifier que la somme des quatre nombres trouvés est 15 et qu'il n'y a pas de nombres répétés.

Ou bien, supposer successivement que les 4 fleurs sont des tulipes, des marguerites des jonquilles ou des roses, rassembler les répartitions possibles dans un tableau comme celui-ci et retenir les solutions.

tulipes	marguerites	jonquilles	roses	total
4	2	3	6	15
2	4	5	4	15
3	3	4	5	15
1	5	6	4	16
5	1	2	4	12

- Éliminer les combinaisons comportant deux fois le même nombre ou dont la somme est différente de 15. Conclure qu'il y a 4 tulipes dans le bouquet.

Ou bien, pour une étude plus systématique, comprendre que l'hypothèse de 4 fleurs parmi les tulipes, les marguerites ou les jonquilles donne pour chacune une seule répartition du fait de la donnée des 6 ou 7 fleurs.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (4 tulipes, 2 marguerites, 3 jonquilles, 6 roses) avec des explications claires montrant l'unicité de la répartition obtenue ou avec un tableau complet des possibilités
- 3 Réponse correcte avec seulement une vérification ou réponse correcte avec des explications sans l'unicité
- 2 Réponse correcte sans explication ni vérification
ou réponse incorrecte avec une répartition où seule la condition que « les nombres, sont tous différents » n'est pas respectée
- 1 Début de raisonnement correct (tentatives infructueuses qui ne respectent pas une ou plusieurs conditions).
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6

Origine : Milano

8. UNE FAMILLE D'ELFES (Cat. 5, 6)

Dans les bois d'un pays lointain vit une famille d'elfes : le papa, la maman, leur fille et les grands-parents. Les elfes sont des créatures fantastiques qui peuvent vivre très longtemps.

Dans moins de dix ans, le grand-père va avoir 1000 ans.

La jeune fille, sa mère et son grand-père ont leurs anniversaires le même jour.

Cette année, le jour de leurs anniversaires, la petite fille dit à son grand-père : « Grand-père, as-tu remarqué qu'aujourd'hui maman a exactement la moitié de ton âge et que moi j'ai exactement un tiers de l'âge de maman ? ».

Dans combien d'années le grand-père aura-t-il 1000 ans ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Trouver l'entier naturel compris entre 990 et 1000 divisible par 2 et 3.

Analyse de la tâche

- Déduire des données que le grand-père a plus de 990 ans et moins de 1000 ans.
 - Comprendre que dans ces circonstances, les âges des trois elfes sont des nombres entiers.
- Il y a, à ce stade, de nombreuses façons de procéder, par exemple :
- Essayez tous les nombres compris entre 990 et 1000. Choisir parmi eux les nombres divisibles par 2, pour en déduire les âges possibles de la mère : 496, 497, 498, 499 (495 devrait être écarté parce que le grand-père aura 1000 ans dans moins de 10 ans), reconnaître parmi ces 4 nombres le seul qui soit divisible par 3 : 498 .

En déduire qu'aujourd'hui le grand père a 996 ans et qu'il aura 1000 ans dans 4 ans.

Les essais peuvent également commencer à partir de l'âge de la mère ou de la fille.

Ou bien, se rendre compte que l'âge du grand-père doit être un multiple de 6 (divisible par 2 et par 3) et chercher les multiples de 6 entre 990 et 1000 : il n'y a que 996.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (4 ans) avec des explications claires et complètes
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou imprécises,
ou réponse 996 années avec des explications claires et complètes,
ou la réponse sur le nombre d'années restantes n'est pas correcte, mais l'âge actuel du grand-père est exact,
ou détermination correcte de l'âge de la fille avec des explications complètes
- 2 Réponse correcte sans explication,
ou réponse « 990 années » ou « dans 10 ans » avec des explications claires et complètes
- 1 Explication de l'intervalle dans lequel se situe l'âge du grand-père, à l'exception de 990 et 1000,
ou réponse « 990 années » ou « dans 10 ans » sans explication
ou début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Belluno

9. LES CHATAIGNES DE CHARLES (II) (Cat. 5, 6, 7)

Charles a récolté 81 kg de châtaignes. Il commence à les mettre dans trois paniers, un petit, un moyen et un grand.

Les châtaignes qu'il a mises dans le panier moyen pèsent le double de celle qu'il a mises dans le petit panier et les châtaignes qu'il a mises dans le grand panier pèsent le double de celle qu'il a mises dans le panier moyen.

Après avoir rempli les trois paniers, il lui reste quelques kilos de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes contenues dans le grand panier.

Combien de kilos de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier ?

Combien de kilos lui restent-ils ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Répartir 81 en quatre nombres proportionnellement à 1, 2, 4 et 2.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les relations « double » et « moitié » sont inverses et que « le poids du contenu du grand panier est le double de celui du panier moyen » signifie aussi que « le poids du contenu du panier moyen est la moitié de celui du grand » et que par conséquent, le poids du reste est le même que le poids du contenu du panier moyen.
- Passer à la recherche de quatre nombres un « petit », deux « moyens » qui sont le double du « petit » et un « grand » qui est le double de chacun des « moyens » (ou leur somme) dont la somme est 81.
- Par essais, à partir du petit panier, écrire les quadruplets possibles : 1, 2, 4, 2 ; 2, 4, 8, 4 ; 3, 6, 12, 6 ... et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 9, 18, 36, 18 pour satisfaire la condition que le total est 81 (en kg).

Ou bien, comprendre que le poids total des châtaignes, 81 kg, est la somme de 9 termes égaux au poids des châtaignes du petit panier ($n + 2n + 4n + 2n = 9n$). Calculer ainsi ce poids : $81 : 9 = 9$ kg dans le petit panier, et donc $9 \times 2 = 18$ kg dans le panier moyen, et enfin $9 \times 4 = 36$ kg dans le grand panier, et il reste $36 : 2 = 18$ kg de châtaignes.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte et complète (petit panier : 9 kg ; panier moyen : 18 kg ; grand panier : 36 kg ; reste 18 kg) avec explications complètes et claires
- 3 Réponse exacte avec explications incomplètes ou peu claires
ou, réponse correcte pour chaque panier (9 kg, 18 kg, 36 kg) avec des explications sans indiquer le poids des châtaignes restantes.
- 2 Réponse correcte sans explication
ou procédure correcte mais avec une erreur de calcul au cours de la résolution
- 1 Début de recherche traduisant la prise en compte de certaines relations entre les contenus des paniers et le reste.
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Belluno

10. LES MARQUES NOIRES (Cat. 5, 6, 7)

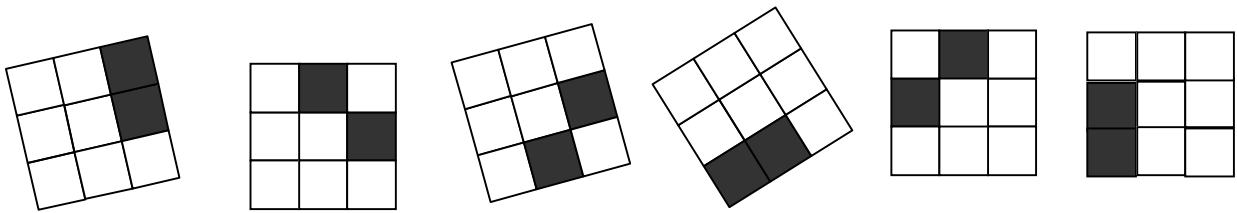
Ali Baba a découvert la caverne de la *Bande des Marques noires* qui contient des centaines d'objets précieux. Chaque voleur de la bande a tamponné sa propre marque sur les objets qu'il a volés.

Toutes les marques de la bande sont des grilles carrées de 9 cases dont deux sont noires et les sept autres blanches. Pour reconnaître ses objets, chaque voleur a une marque différente de celle des autres voleurs.

Ali Baba a pu identifier trois de ces marques tamponnées sur six objets volés :

- deux objets avec la marque de Jojo-la-béquille,
- trois objets avec celle de Rackham-le-borgne et
- un objet avec la marque de Dédé-les-grandes-feuilles.

Voici les photos de ces six marques :



.....
 Ecrivez les noms des trois voleurs **Jojo**, **Rackham** et **Dédé** sous chacune de leurs marques.

Combien de voleurs au maximum peut-il y avoir dans la Bande des Marques noires pour que chacun ait une marque différente de celles des autres ?

Dessinez, dans les grilles ci-dessous toutes les autres marques différentes des trois premières déjà dessinées ci-dessus.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

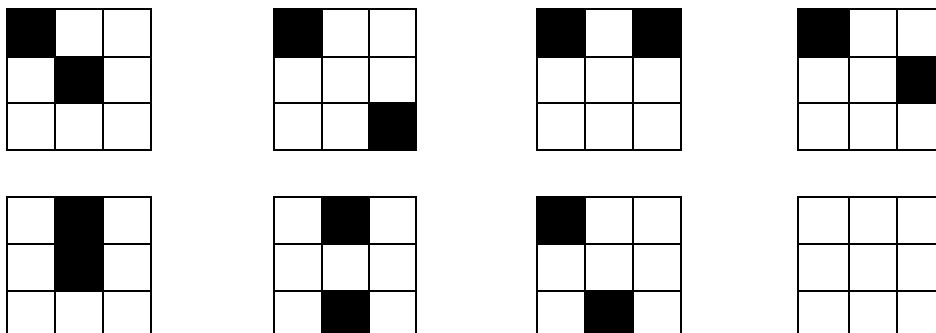
- Dresser l'inventaire des différentes dispositions de deux cases, à une rotation près, sur une grille carrée de neuf cases (3 x 3), dans un contexte où les figures ne peuvent pas être "retournées" par une symétrie axiale.

Analyse de la tâche

- Observer les six figures données, constater qu'il y en a trois avec deux carrés contigus et trois avec deux carrés n'ayant qu'un sommet en commun, alors que l'énoncé parle d'une répartition en « trois », « deux » et « un ».
- Découvrir qu'un des groupes de trois figures se décompose en deux marques égales (la première et la dernière, qu'on peut superposer par une rotation d'un demi-tour) et que la quatrième depuis la gauche est « retournée » par rapport aux deux autres.

Les marques sont, dans l'ordre, celles de Jojo, Rackham, Rackham, Dédé, Rackham, Jojo.

- Dessiner ensuite les autres dispositions différentes des deux carrés noirs sur les marques. Il y en a 7 :



- Conclure qu'il ne peut y avoir plus de 10 voleurs dans la bande

Attribution des points

- 4 Réponse correcte : la liste des six noms correspondant aux six marques (dans l'ordre : Jojo, Rackham, Rackham, Dédé, Rackham, Jojo) maximum de 10 voleurs et les dessins des 7 autres marques
- 3 Correspondance correcte entre la liste des six noms et les marques et une seule erreur (deux marques identiques à une rotation près) ou un oubli ou un doublon parmi les 7 autres dispositions ou une erreur dans la correspondance noms/marques mais les 7 autres marques correctes
- 2 Correspondance correcte entre la liste des six noms et les marques et deux ou trois erreurs, oublis ou doublons parmi les 7 autres marques
- 1 Correspondance correcte entre la liste des six noms et les marques avec moins de 4 marques correctes
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Riva del Garda, fj

11. AU MUSÉE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Sept amis vont visiter un musée. Ils doivent choisir entre deux types de parcours prévus : visite réduite et visite complète. Le billet pour la visite complète coûte 10,50 euro de plus que l'autre. Cinq d'entre eux prennent chacun un billet pour la visite réduite, mais Pierre et Anne achètent chacun un billet pour la visite complète.

À la sortie, Pierre dit à Anne : « à nous deux, nous avons dépensé 6 euro de plus que les cinq autres ensemble ».

Combien coûte chacun des billets, pour la visite réduite et pour la visite complète ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

- Trouver un nombre entier tel que son quintuple augmenté de 6 soit égal au double de ce nombre augmenté de 21.

Analyse de la tâche

- Procéder par des essais organisés en supposant un certain prix pour la visite réduite, en déduire celui de la visite complète et vérifier si l'affirmation de Pierre est satisfaite. Sinon, modifier progressivement les valeurs supposées.

Par exemple, si on suppose 10 euro pour la visite réduite on obtient 41 euro pour Pierre et Anne et 50 euro pour les autres, la différence n'est pas 6 euro ; avec 7 euro on obtient 35 euro pour Pierre et Anne ainsi que pour les cinq autres, ce qui ne va pas ; avec 6 euro on obtient 33 euro pour Pierre et Anne et 30 pour les autres, ce qui ne va pas non plus ; avec 5 euro on obtient 31 euro pour Pierre et Anne et 25 euro pour les autres, la différence est bien de 6 euro. Déduire que le prix pour la visite complète est de 15,50 euro ($= 5 + 10,50$).

Ou bien : se représenter la situation en considérant que cinq amis ont payé 5 fois le même prix, pendant que Pierre et Anne ensemble ont payé 2 fois celui-ci plus 21 euro ($10,50 \times 2$). On peut ensuite faire la comparaison entre la dépense de Pierre et d'Anne avec celle des cinq amis, par exemple en ajoutant 6 euro à la dépense de ces derniers. Obtenir ainsi que cinq fois un même prix augmenté de 6 est égal à deux fois le même prix augmenté de 21. De cette représentation (mentale ou graphique) déduire que 3 fois le même prix est égal à 15 ($= 21 - 6$) euro et donc que le prix du billet pour la visite réduite est de 5 euro et celui de la visite complète est de 15,50 euro.

Ou bien : par l'algèbre, en notant x le prix du billet de la visite réduite et $x + 10,50$ celui de la visite complète, établir l'équation $5x + 6 = 2(x + 10,50)$ ou $3x = 15$, dont la solution est 5, et en déduire le prix du billet de la visite complète : 15,50 euro.

Attribution des points

- 4 Réponses correctes (5 euro pour la visite réduite ; 15,50 euro pour la visite complète) avec des explications claires et, dans le cas d'une procédure par essais, vérification des conditions
- 3 Réponses correctes mais avec des explications peu claires ou seulement une vérification
ou bien procédure correcte et bien expliquée, mais explicitée seulement le prix d'un seul type de parcours
- 2 Réponses correctes sans explication
ou bien erreur de calcul pour une des deux réponses, mais procédure correcte l'
- 1 Début de raisonnement correct
ou bien réponse « 9 euro » dû à une mauvaise utilisation des 6 euro de différence dans la comparaison entre les deux dépenses
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

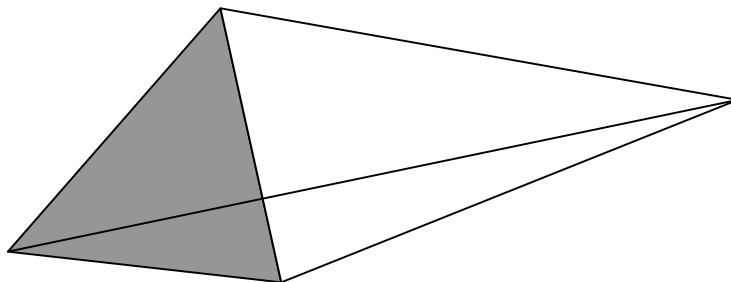
Origine : Groupe Algèbre, reprise de *Beignets au chocolat* (21, I, 10)

12. HERITAGE A PARTAGER (Cat 7, 8)

Un agriculteur laisse en héritage à son fils et à sa fille un champ d'une valeur de 30 000 euros et des économies d'un montant de 21 000 euros.

La figure ci-dessous représente le champ : un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et partagé par l'une d'elles en deux triangles, l'un en gris, l'autre en blanc. Un tiers de l'autre diagonale est situé dans la partie grise.

La fille choisit la partie grise, le fils prend le triangle blanc.



Les deux héritiers doivent se partager l'ensemble de l'héritage en deux parts de même valeur.

Comment doivent-ils se répartir les 21 000 euros ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez les calculs que vous avez faits.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Partager équitablement un héritage composé de 21 000 euros et d'un champ d'une valeur de 30 000 euros divisé en deux parties triangulaires de même base et de hauteurs l'une double de l'autre.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut d'abord comparer les aires des deux triangles.
- Remarquer que les triangles ont une base commune. En déduire que leurs aires sont proportionnelles au rapport des mesures des hauteurs correspondantes situées sur la diagonale du quadrilatère dans les deux triangles, l'une étant le double de l'autre.
- Calculer les valeurs des deux champs : 10 000 euros pour le triangle gris de la fille et 20 000 euros pour le triangle blanc du fils.
- Comprendre que la fille doit d'abord recevoir 10 000 euros de la somme héritée, puis qu'il faut partager les 11 000 euros restants en deux parts égales.

Ou bien, comprendre que chaque héritier doit recevoir la moitié de l'héritage, soit 25 500 euros.

- Conclure que la fille recevra 15 500 euros et le fils 5 500 euros.

Attribution des points

- 4 La répartition correcte (15 500 euros pour la fille et 5 500 euros pour le fils) avec une explication claire montrant le rapport des aires des deux triangles
- 3 La répartition correcte avec une explication peu claire
- 2 La répartition correcte sans explication
ou bien la répartition correcte de la valeur du champ avec explication, mais sans le partage des 21 000 euros
- 1 Début de recherche, ou répartition correcte de la valeur du champ et répartition erronée des 21 000 euros (par ex. selon le rapport 1 à 2) en obtenant 7 000 et 14 000).
- 0 Incompréhension du problème

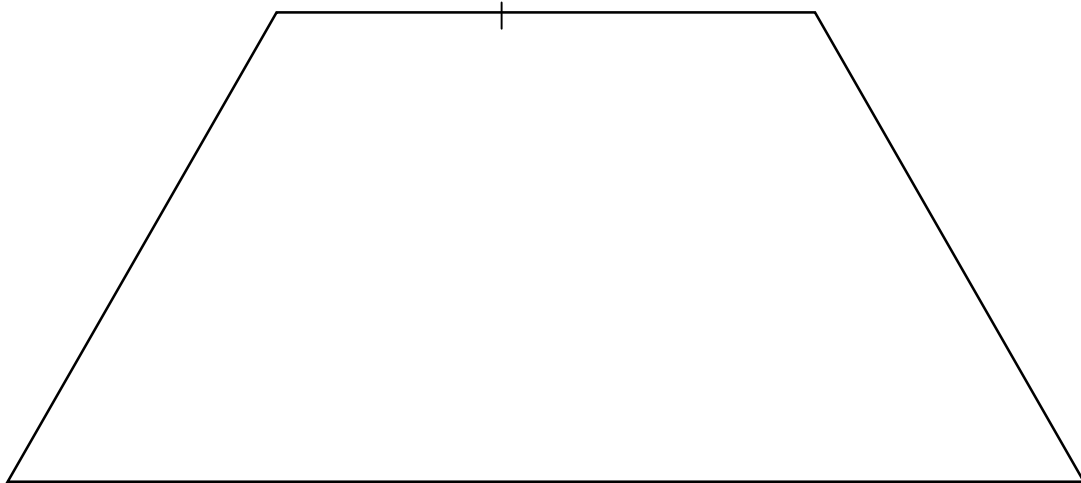
Niveaux : 7, 8

Origine : Franche-Comté

13. PARTAGE ÉQUITABLE (Cat. 7, 8, 9, 10)

O

Luc et Catherine ont hérité d'un grand terrain qui a la forme d'un trapèze isocèle. Ils veulent partager ce terrain en deux parcelles de même aire par une barrière rectiligne partant d'un poteau planté sur un des côtés parallèle du trapèze (P sur la figure). N Q F



Dessinez sur la figure le segment $[PQ]$, qui partage ce trapèze isocèle en deux parties de même aire.

Expliquez comment vous avez déterminé l'emplacement de l'autre extrémité Q du segment.

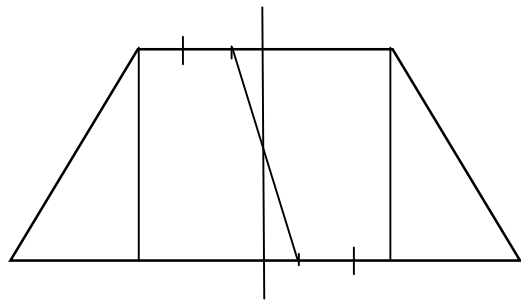
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Partager un trapèze isocèle en deux parties de même aire par un segment de droite joignant un point donné sur la petite base à un point à déterminer.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour un partage équitable, il faut que les parcelles de Luc et de Catherine aient la même aire.
- Remarquer que P est sur la petite base du trapèze mais qu'il n'est pas en son milieu.
- Comprendre qu'il faut donc tracer un segment $[PQ]$ qui n'est pas perpendiculaire aux bases, car les deux parties obtenues n'auraient pas la même aire.
- En notant A, B, C, D les sommets du trapèze, M le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[BC]$, remarquer que (MN) est la médiatrice commune aux deux bases du trapèze, le partageant en deux trapèzes symétriques, $ABNM$ et $MNCD$.
- Avec un compas ou par une mesure de longueur précise, reporter la longueur PM pour positionner le point Q sur $[BC]$ tel que $NQ = PM$, les triangles rectangles PMO et QNO ainsi formés ont alors la même aire. En déduire que les parties $ABQP$ et $PQCD$ sont aussi d'aires égales.



Remarquer que $[PM]$ et $[NQ]$ sont parallèles et de même longueur, en déduire que $PNQM$ est un parallélogramme. Le point Q sur $[BC]$ est donc sur la parallèle à (PN) issue de M.

Ou bien, les perpendiculaires aux deux bases $[AD]$ et $[BC]$ issues de A et D déterminent deux triangles ABE et DFC de même aire, car symétriques par rapport à la médiatrice (MN) . Comprendre qu'il reste à partager le rectangle $AEFD$ en deux parties de même aire par le segment $[PQ]$.

- Reporter la longueur AP pour positionner le point Q sur $[BC]$ tel que $QF = AP$. En déduire que les deux trapèzes rectangles $AEQP$ et $FDPQ$ ont la même aire, car étant de même hauteur, ils ont leurs bases de mêmes longueurs. Conclure que les parties $ABQP$ et $PQCD$ ont la même aire car elles sont composées de parties d'aires égales.

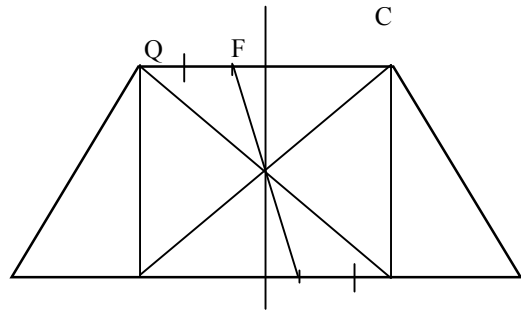
Ou bien, en utilisant seulement des mesures de longueurs partir de la construction du rectangle $AEFD$:

- Mesurer AD, BC et AP. En déduire $FC = (BC - AD)/2$ et placer le point Q sur [BC] tel que $QC = AP + FC$ et vérifier de même que précédemment que les deux parties ABQP et PQCD ont la même aire.

Ou bien réaliser une construction géométrique n'utilisant que la règle en remarquant que Q doit être le symétrique de P dans la symétrie de centre O, situé à l'intersection des diagonales du rectangle AEFD.

- Tracer la droite (PO) jusqu'à rencontrer [BC], le point d'intersection ainsi obtenu est Q. En déduire que les deux trapèzes AEQP et FDPQ sont également symétriques dans cette symétrie centrale et ont donc la même aire.

Conclure que les parcelles ABQP et PQCD ont la même aire.



Attribution des points

- 4 Le point Q bien placé, par report de longueurs ou géométriquement ou avec des mesures, avec une explication claire de sa construction et du fait que les aires des parcelles obtenues sont bien égales.
- 3 Le point Q bien placé avec la présentation de sa construction, sans justification de l'égalité des aires.
- 2 Le point Q apparemment bien placé sans explication.
- 1 Début de recherche utilisant une symétrie ou avec la remarque de l'égalité des aires des triangles rectangles ABE et DFC, mais sans le partage du rectangle.
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

14. A LA PIZZERIA (Cat. 7, 8, 9, 10)

Trois amis vont dans une pizzeria et avant de commander ils consultent le menu :

PIZZERIA RMT - SPECIALITÉS TRANSALPINES			
pizzas		boissons et desserts	
pizza margherita	5,50 €	eau	2 €
pizza aux champignons	6,30 €	coca-cola	3,10 €
pizza quatre saisons	7,50 €	bière	3,80 €
pizza vosgienne	8,20 €	desserts	5 €
pizza mozarella	8,50 €	café	2 €
pizza transalpine	9 €		

Ils choisissent ainsi :

- André : pizza quatre saisons, bière et café
- Bernard : pizza vosgienne, eau et dessert
- Charles : pizza transalpine, coca-cola et dessert

Chacun prépare ce qu'il a à payer sur la base de ce qu'il a consommé ; à la caisse, le total est seulement de 42 € car ils ont eu droit à une réduction.

Combien chacun devra-t-il payer à la caisse pour une juste répartition de la réduction conformément aux différentes consommations ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

- Partager la réduction proportionnellement aux montants des consommations commandées par les trois amis.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'une « répartition équitable » de la réduction effectuée sur le coût total doit être faite proportionnellement au coût de ce que chacun a consommé.
- Calculer le coût du repas de chacun sans réduction : André a consommé pour 13,30 €, Bernard pour 15,20 € et Charles pour 17,10 €. Coût total : 45,60 € .
- En déduire que la réduction est de $45,60 - 42 = 3,60$ €.
- Calculer la somme à payer par chacun en appliquant la proportionnalité entre les coûts des repas et les sommes à régler, utilisation d'égalités de rapports ou d'un éventuel tableau de proportionnalité du type :

	Total	André	Bernard	Charles
Coût des repas (en €)	45,60	13,30	15,20	17,10
Somme à payer après réduction (en €)	42	12,25	14	15,75

- Déterminer les montants des dépenses effectives A, B, C, respectivement d'André, de Bernard et de Charles, en considérant que le rapport entre chacune d'elle et le prix de la consommation correspondante est égal au rapport entre la dépense effective globale et le prix total des consommations. On a donc la chaîne de rapports : $A/13,30 = B/15,20 = C/17,10 = 42/45,60$, d'où les sommes à payer par chacun : $A = 12,25$; $B = 14$; $C = 15,75$.

Ou bien, calculer le montant de la remise (3,60 €) et la répartir proportionnellement entre les trois amis :
 $3,60 \times 13,30 / 45,60 = 1,05$ est la remise d'André, qui payera donc $13,30 - 1,05 = 12,25$ € ;
 $3,60 \times 15,20 / 45,60 = 1,20$ est la remise de Bernard, qui payera donc $15,20 - 1,20 = 14$ € ;
et $3,60 \times 17,10 / 45,60 = 1,35$ € est la remise de Charles, qui payera $17,10 - 1,35 = 15,75$ €.

Ou bien, employer la proportionnalité pour le calcul d'un pourcentage de réduction à appliquer à la dépense initiale de chaque ami. Avec cette procédure, l'approximation au centième est importante. Trouver, en utilisant la proportionnalité, que le pourcentage correspondant à la remise (3,60 €) est de 7,8947...% [utiliser éventuellement une valeur approchée au centième]. Sur la base de ce pourcentage, calculer la remise revenant à chacun des trois amis : pour André : 1,049 €..., pour Bernard : 1,199..., et pour Charles : 1,349... ; arrondir les trois valeurs au centième 1,05 € ; 1,20 € et 1,35 € et enlever chaque remise au coût initial correspondant.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (André : 12,25 € ; Bernard : 14 € ; Charles : 15,75 €) avec explications complètes de la procédure
- 3 Réponse correcte, mais avec des explications peu claires ou incomplètes
- 2 Réponse correcte sans explication
ou procédure correcte mais réponse erronée due à une erreur de calcul ou pour ne pas avoir donné les valeurs approchées au centième.
- 1 Réponse avec des erreurs de calcul mais avec une procédure correcte,
ou début de procédure correcte
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Parma

15. THÉ ENTRE AMIES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Cet après-midi Anne attend son amie Béatrice pour le thé. Anne est assise dans un fauteuil et regarde dans le miroir en face d'elle l'image d'une horloge accrochée au mur derrière elle. D'après la position des aiguilles qu'elle voit dans le miroir, elle se dit que l'heure du rendez-vous est passée d'une heure et vingt minutes. A cet instant, arrive Béatrice qui affirme, en regardant sa montre, qu'elle est parfaitement à l'heure ! L'horloge et la montre fonctionnent parfaitement et sont exactement à la même heure.

Quelle est l'heure du rendez-vous ?

Expliquez comment vous avez répondu à cette question.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

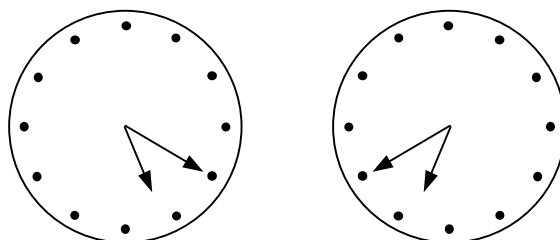
- Déduire l'heure donnée par une horloge à aiguilles, en connaissant la différence entre l'heure réelle et son reflet dans un miroir.

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'heure que voit Anne se refléter dans le miroir n'est pas l'heure réelle mais est son symétrique par rapport à un axe vertical.
- Procéder par des essais à partir d'une heure plausible pour le thé, par exemple 17h00 ; l'image du miroir correspond à 19h00, avec une différence de 2 heures. Pour les heures suivantes la différence se réduit.

Heure réfléchie	Heure réelle	Différence
19h00	17h00	2h00
18h45	17h15	1h30
18h40	17h20	1h20

- Conclure qu'il est 17h20 quand Béatrice arrive.
- Il peut être utile de s'aider de dessins ou d'une horloge avec des aiguilles.



- L'aiguille des heures doit être proche de l'axe vertical de l'horloge (midi ou 6 heures) pour avoir une différence d'une heure.
- Pour l'aiguille des minutes on constate que le chiffre 4 est symétrique du chiffre 8 par rapport à l'axe 6-12.
- Pour l'aiguille des heures on peut vérifier que pour les positions 5h20 et 6h40 elles se situent à une même distance du 6 à savoir $\frac{2}{3}$ d'un segment horaire respectivement et $\frac{1}{3}$ d'un segment horaire par rapport au 12 pour les positions 11h20 et 12h40.
- On peut remarquer qu'il existe d'autres solutions qui ne conviennent pas pour l'après-midi : 5h20, 11h20 (plutôt pour un apéritif) et 23h20 !

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (17h20) avec explication détaillée du raisonnement
- 3 Réponse correcte (17h20) avec explication insuffisante ou peu claire
- 2 Réponse correcte (17h20) sans explication
- 1 Début de raisonnement correct (dans lequel il y a au moins la compréhension de l'idée de symétrie)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda

16. LE PAQUET DE CLAIRE (Cat. 8, 9, 10)

Claire doit expédier un paquet. Elle décide d'utiliser une boîte qui a la forme d'un parallélépipède rectangle.

Au bureau de Poste, elle trouve l'affiche suivante :

- poids : maximum 20 kg ;
- longueur de la boîte : pas supérieure à 1 mètre ;
- longueur de la boîte + périmètre de la base de la boîte : pas supérieure à 2 mètres ;
- toutes les mesures doivent être faites au centimètre près.

Claire est certaine de ne pas dépasser le poids autorisé et choisit les dimensions de sa boîte pour avoir un volume maximum.

Quelles sont les dimensions de la boîte que Claire va utiliser ?

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

- Calculer les dimensions a , b et c d'un parallélépipède rectangle de volume maximal, sachant que : $a \leq 100$ et $a + 2(b + c) \leq 200$

Analyse de la tâche

- Considérer que la longueur du parallélépipède ne doit pas dépasser 100 centimètres, exprimer le périmètre de la base du paquet en fonction de sa largeur et de sa hauteur et comprendre que la somme de la longueur et du périmètre de la base ne doit pas dépasser 200 cm.
- Se souvenir de la formule pour calculer le volume d'un parallélépipède : abc , où a , b et c sont les mesures des trois dimensions, et reconnaître qu'à longueur égale, pour avoir un volume maximal, l'aire de cette base doit également être la plus grande possible.
- En fixant la longueur du parallélépipède et le périmètre de la base par exemple à 100 centimètres, faire varier les dimensions de la base pour calculer les volumes correspondants :
 - avec $b = c = 25$ cm, le volume est $25 \times 25 \times 100 = 62\,500$ cm³
 - avec $b = 24$ cm et $c = 26$ cm, le volume est $24 \times 26 \times 100 = 62\,400$ cm³
 - avec $b = 22$ cm et $c = 28$ cm, le volume est $22 \times 28 \times 100 = 61\,600$ cm³
 - avec $b = 20$ cm et $c = 30$ cm, le volume est $20 \times 30 \times 100 = 60\,000$ cm³
 - avec $b = 10$ cm et $c = 40$ cm, le volume est $10 \times 40 \times 100 = 40\,000$ cm³
- Se rendre compte que parmi les rectangles de même périmètre, le carré est celui dont l'aire est la plus grande et donc que pour une longueur fixée du pavé, on obtiendra un volume maximal si la base est un carré.
- Constater que le volume peut augmenter en diminuant la longueur et en augmentant le périmètre de la base. Par exemple, choisir 30 cm pour le côté de la base carrée et 80 cm pour la longueur du pavé, ce qui donne un volume de $30 \times 30 \times 80 = 72\,000$ cm³
- Procéder par essais successifs ordonnés et découvrir que le parallélépipède dont le volume est maximal ($74\,052$ cm³) est celui dont la longueur est de 68 cm et le périmètre de base de 132 cm (33×4).

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (base : 33×33 , longueur : 68 cm) déterminée au moyen d'essais organisés, avec justification du choix d'une base carrée et détail des calculs
- 3 Réponse exacte sans justification du choix de la base carrée et obtenue au moyen de tentatives peu organisées
- 2 Réponse exacte sans explications
ou bien réponse non optimale relative à un parallélépipède à base carrée ($34 \times 34 \times 64$ ou bien $32 \times 32 \times 72$)
- 1 Réponse $25 \times 25 \times 100$ obtenue avec des tentatives qui maintiennent maximale la longueur du paquet
ou bien début de raisonnement correct (par exemple arriver à comprendre que la de base doit être carrée ou bien calcul du volume d'au moins cinq parallélépipèdes)
- 0 Incompréhension du problème ou bien volumes inférieurs à $62\,500$ cm³

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Sassari

17. NOMBRES MAGIQUES (Cat. 8, 9, 10)

Antoine propose ce jeu à sa sœur Zoé :

« Pense à un nombre de deux chiffres.

Multiplie ce nombre par 4.

Au résultat, ajoute 68.

Multiplie le total par 25.

À ce résultat, ajoute le nombre entier formé par les trois premiers chiffres du nombre pi (π).

Puis retranche ton année de naissance.

Tu trouves un nombre de 4 chiffres.

Les deux premiers donnent le nombre que tu as choisi et les deux derniers donnent ton âge en 2014 ».

Zoé suit les indications et vérifie qu'Antoine a raison.

Expliquez pourquoi ce calcul tombe toujours juste.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

- Expliquer le fonctionnement d'un jeu : à partir d'un nombre quelconque de deux chiffres pensé par un joueur, appliquer une suite d'opérations, puis du résultat retrancher l'année de naissance du joueur pour obtenir un nombre de quatre chiffres dont les deux premiers forment le nombre pensé et les deux derniers l'âge du joueur.

Analyse de la tâche

- Faire quelques essais pour vérifier que le jeu fonctionne pour n'importe quel nombre et avec n'importe quelle personne qui joue.
- Comprendre que le nombre choisi par Zoé est d'abord multiplié par 4 puis par 25, il est donc multiplié par 100 et devient un nombre de centaines.
- Comprendre que par distributivité de la multiplication sur l'addition on ajoute 68 multiplié par 25, soit 1700.
- En continuant l'algorithme, Zoé ajoute 314 à 1700, ce qui donne 2014.
- De 2014, Zoé retranche son année de naissance, ce qui donne son âge en 2014 (nombre de 2 chiffres, éventuellement commençant par 0 !).
- Le résultat du calcul de Zoé est un nombre à 4 chiffres dont les deux premiers chiffres donnent un nombre de centaines égal au nombre choisi et les deux derniers chiffres, les dizaines et les unités donnent son âge en 2014.

Ou bien : Écrire le nombre de deux chiffres en forme polynomiale $10x + y$ et le transformer selon les indications données : $4(10x + y)$; $40x + 4y + 68$; $25(40x + 4y + 68) = 1000x + 100y + 1700$;
 $1000x + 100y + 1700 + 314 = 100(10x + y) + 2014$.

On observe ainsi qu'on obtient un nombre de quatre chiffres dont les deux premiers forment le nombre choisi et la différence entre 2014, l'année actuelle, et l'année de naissance est l'âge de la personne qui joue.

Attribution des points

- 4 Une explication complète et claire montrant la compréhension de la distributivité et le calcul de l'âge
- 3 Une explication peu claire ou incomplète, mais qui met en évidence le calcul de l'âge de Zoé
- 2 Une explication très incomplète, qui montre le calcul des centaines à partir du nombre choisi
- 1 Début de recherche avec plusieurs exemples et un début d'explication
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

18. LES DEUX CERCLES (Cat. 9, 10)

Luc dessine un cercle et son ami Matteo dessine un cercle concentrique dont la longueur mesure 10 cm de plus.

Quelle est-elle la distance entre les deux cercles ?

Exprimez le résultat au millimètre près et justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

- Calculer la distance entre deux cercles concentriques quand la différence de leurs longueurs est donnée.

Analyse de la tâche

- En notant par exemple r et R les rayons des deux cercles, on peut exprimer la relation entre les deux longueurs des deux cercles sous la forme $2\pi R = 2\pi r + 10$.
- Comprendre qu'à partir de l'expression précédente, on doit calculer la différence entre R et r : $2\pi R - 2\pi r = 10$; et en déduire $2\pi(R - r) = 10$, donc $(R - r) = 5/\pi$, et calculer $5/\pi$, environ 1,6 (en cm). Se rendre compte que cette procédure est générale et vaut quel que soient les rayons des cercles en jeu.

Ou bien, procéder avec quelques exemples à partir de valeurs attribuées à la longueur du cercle de Luc, dont on déduit la longueur du cercle de Matteo qui mesure 10 cm de plus. Calculer ensuite les rayons de l'un et de l'autre cercle, puis la différence entre les rayons :

par exemple, supposons que la longueur du cercle de Luc est $C = 100$ cm, celle du cercle de Matteo est alors $C' = 110$ cm, d'où $r = 100/2\pi$ (environ 15,9 cm) et $R = 110/2\pi$ (environ 17,5 cm). Obtenir ainsi la distance entre les deux cercles en considérant les valeurs 17,5 et 15,9 des deux rayons, ce qui donne 1,6 cm.

Un autre exemple pourrait être de considérer ensuite $C = 200$, $C' = 210$, d'où $r = 200/2\pi$ (environ 31,8) et $R = 210/2\pi$ (environ 33,4), pour arriver à obtenir encore la même distance entre les deux cercles.

Si on s'arrête à un seul exemple, on ne se rend pas compte que la procédure est générale et que la réponse, « apparemment » correcte, est en quelque sorte « abusive ».

Avec plus d'un exemple, on peut se douter que quels que soient les rayons des cercles en jeu, dans les conditions de l'énoncé, leur distance est toujours la même.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (1,6 cm) avec justification de cette valeur dans le cas général
- 3 Réponse correcte avec justification basée sur plus d'un exemple
- 2 Réponse correcte avec justification basée sur un seul exemple
ou bien réponse erronée due à une erreur de calcul
- 1 Réponse correcte sans explication
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Groupe 0⁰ (Zeroallazero)