Problèmes	Catégories								Domaines				Origine
1. Le distributeur de friandises	3	4							Ar				GE
2. Le pirate Barbenoire (I)	3	4							Ar			Co	AO
3. Sur le banc	3	4							Ar			Lo	fj
4. Les terrains de jeu	3	4									Geo		fj
5. Les tables de multiplication	3	4	5						Ar			Co	RV
6. Chats gourmands		4	5						Ar			Co	SI
7. Le pirate Barbenoire (II)			5	6					Ar			Co	AO
8. Rectangles agrandis			5	6	7						Geo		gp géo 2D
9. Tapis à dérouler			5	6	7				Ar		Geo		gp prop
10. Les constructions de la grand-mère			5	6	7						Geo		RZ
11. La maquette			5	6	7	8					Geo		gp géo3D
12. Voyage en train				6	7	8						Lo	LU
13. Découpage de triangles				6	7	8					Geo	Lo	RZ
14. Chasse au trésor					7	8	9	10				Lo	RV
15. Marché aux puces						8	9	10	Ar	Alg			SI
16. Rencontre dans le parc						8	9	10	Ar		Geo		PR
17. À la recherche du carré						8	9	10	Ar	Alg			SR
18. Voyage en avion							9	10	Ar	Alg			PR
19. Le rectangle à dessiner							9	10			Geo		gpp
20. Le déplacement							9	10		Alg			SI

1. LE DISTRIBUTEUR DE FRIANDISES (Cat. 3, 4)

Marta a une pièce de 20 centimes, une de 50 centimes et une de 1 €.
Elle est devant un distributeur automatique qui propose six sortes de friandises aux prix suivants:

Caramels	Chips	Cacahuètes	Barre chocolatée	Sachet bonbons	Paquet biscuits
0,70 €	**1 €**	**1,20 €**	**1,40 €**	**1,70 €**	**2 €**

Le distributeur ne fonctionne que si on met des pièces qui donnent exactement le prix affiché.
Marta choisit une de ces six friandises qu'elle aime bien.
Elle constate qu'elle a assez d'argent pour l'acheter, mais elle n'arrive pas à mettre le prix demandé dans le distributeur avec les pièces qu'elle a.

Quelle est la friandise que Marta aimerait s'acheter ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition (calculs avec des monnaies)
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut tenir compte des quatre conditions définies dans l'énoncé : Marta a choisi une des six friandises, elle a assez d'argent pour se l'offrir, la machine exige le prix exact, Marta n'arrive pas à le former.
- Partir des prix des friandises et essayer de les former avec les pièces de Marta.

Caramels	Chips	Cacahuètes	Barre chocolatée	Sachet bonbons	Paquet biscuits
0,70 = 0,20 + 0,50 OUI	1 = 1 OUI	1,20 = 1 + 0,20 OUI	1,40 impossible	1,70 = 1 + 0,50 + 0,20 OUI	2 impossible

- Conclure que Marta désire acheter une barre chocolatée au prix de 1,40 €. Le paquet de biscuits est à exclure car Marta n'a pas assez d'argent pour arriver à 2 €.

Ou bien : partir des pièces de Marta et former toutes les (sept) sommes possibles : 0,20 ; 0,50, ; 0,70 (0,20 + 0,50) ; 1 ; 1,20 (1 + 0,20) ; 1,50 (1 + 0,50) et 1,70 (1 + 0,20 + 0,70).

- Arriver à la conclusion que Marta désire acheter une barre chocolatée au prix de 1,40 € et qu'elle n'a pas assez d'argent pour le paquet de biscuits qui coûte 2 €, car ce montant n'est pas une des sommes possibles et qu'il faut éliminer la somme de 2 € car elle ne figure pas dans les sommes possibles (condition nécessaire) et qu'elle est supérieure à la somme que possède Marta (condition suffisante).

Niveaux : 3, 4

Origine : Genova

2. LE PIRATE BARBENOIRE (I) (Cat. 3, 4)

Le pirate Barbenoire a caché un sac de pièces d'or d'une valeur totale de 500 écus. Dans le sac il y a exactement quatre sortes de pièces : des pièces de 5 écus, de10 écus, de 20 écus et de 50 écus. Barbenoire se rappelle qu'il y a 10 pièces de 5 écus et 10 pièces de 10 écus.

D'après vous, combien peut-il y avoir de pièces de 20 écus et combien de pièces de 50 écus dans le sac de Barbenoire ?

Donnez toutes les possibilités et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication, division avec des nombres naturels
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre les enjeux : les « écus » sont des unités de monnaie comme les « euros » ; distinguer le « nombre » de pièces des « valeurs » des pièces (la valeur totale de 500 écus ne signifie pas qu'il y a 500 pièces) ; le sac est caché et on ne peut plus voir ce qu'il y a dedans ; on peut s'attendre à avoir plusieurs réponses …
- Calculer la valeur des pièces de 5 et de 10 écus, soit 150 écus (10 x 5 + 10 x 10) et en déduire que le reste a une valeur de 350 écus (500 – 150).
- Comprendre qu'il faut obtenir la somme de 350 écus en utilisant seulement des monnaies de 20 et de 50 écus et qu'il peut y avoir plusieurs combinaisons possibles de pièces de 20 et 50 écus pour arriver à une somme de 350.
- Procéder de manière organisée. Par exemple, supposer qu'il existe une seule pièce de 50 écus et en déduire qu'il y a 15 pièces de 20 écus (en effet (350 – 50) : 20 = 15).
- Comprendre, en poursuivant cette procédure, que le nombre de pièces de 50 écus ne peut être égal ni à 2, ni à 4, ni à 6 (dans ces cas-là on ne peut pas compléter avec des pièces de 20 écus) et en déduire qu'avec 3 pièces de 50 écus on a 10 pièces de 20 écus (en effet (350 – 150) : 20 = 10), ou qu'avec 5 pièces de 50 écus on a 5 pièces de 20 écus (en effet (350 – 250) : 20 = 5).
- Se rappeler que Barbenoire a dit qu'il y avait des pièces de chaque sorte et en déduire que la solution 7 pièces de 50 écus et 0 pièce de 20 écus est inacceptable.

Ou bien : procéder par essais non organisés, mais dans ce cas il est possible qu'on ne trouve pas les trois solutions.

Niveaux : 3, 4

Origine : Valle D'Aosta

3. SUR LE BANC (Cat. 3, 4)

Quatre vieilles dames ont l'habitude de se rencontrer, toujours sur un même banc du jardin de leur maison de retraite. Aujourd'hui, elles comparent leurs âges.

- Carmela dit : « *Dans 5 ans, si je suis encore en vie, j'aurai 100 ans* ».
- Carmela dit à Danielle : « *J'ai 7 ans de moins que toi* ».
- Anne et Carmela se regardent et disent : « *Entre nous deux, il y a 4 ans de différence* ».
- Anne dit à Berthe : « *J'ai 12 ans de plus que toi !* ».
- La plus jeune dit à la plus âgée : « *Tu as 15 ans de plus que moi* ».

Quels sont les âges des quatre dames ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse, en notant vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

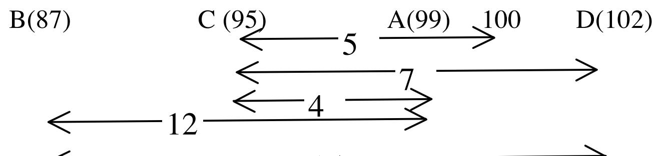
- Arithmétique : addition et soustraction
- Logique : raisonnement hypothético-déductif

Analyse de la tâche

- Voir que la première information permet directement d'établir que **Carmela a 95 ans** (100 – 5).
- Déduire de la seconde information, en interprétant le « sept ans de moins » par une addition à partir de l'âge de Carmela, que **Danielle a 102 ans** (95 + 7) (et non 88 = 95 – 7).
- Faire une hypothèse sur l'âge d'Anne en utilisant la troisième information. On a deux possibilités : Anne a 91 ans ou 99 ans parce qu'entre Anne et Carmela il y a 4 ans de différence et on ne sait pas laquelle est la plus âgée.
- Déduire alors de la quatrième information, que l'âge de Berthe est 79 ans (91–12) ou bien 87 ans (99–12).
- Conclure que, dans les deux cas, Berthe est la plus jeune et Danielle la plus âgée et donc que **Berthe a 87 ans** parce que d'après la cinquième information, on sait qu'entre la plus jeune et la plus âgée il y a 15 ans de différence. **Anne** est donc âgée de **99 an**s (87 + 12).

Ou bien : de la quatrième information déduire que Berthe est plus jeune qu'Anne ; de la deuxième, déduire que Carmela est plus jeune que Danielle et de la troisième information (avec les deux précédentes) déduire que les âges d'Anne et de Carmela sont compris entre ceux de Berthe et de Danielle. Conclure que Berthe est la plus jeune et que Danielle est la plus âgée. D'après la première et la deuxième information, Carmela a 95 ans et Danielle a 102 ans (95 + 7), et par conséquent, d'après la troisième information, Berthe en a 87 (102–15).

Ou bien: placer les âges A, B, C, D et 100 sur un axe ou sur un alignement (ou autre schéma) en y notant les intervalles 5, 7, 4, 12 et 15 (pour vérification) et en les ajustant progressivement pour arriver à :



Ou bien : travailler par essais et vérifications, à partir de « Carmela a 95 ans ».

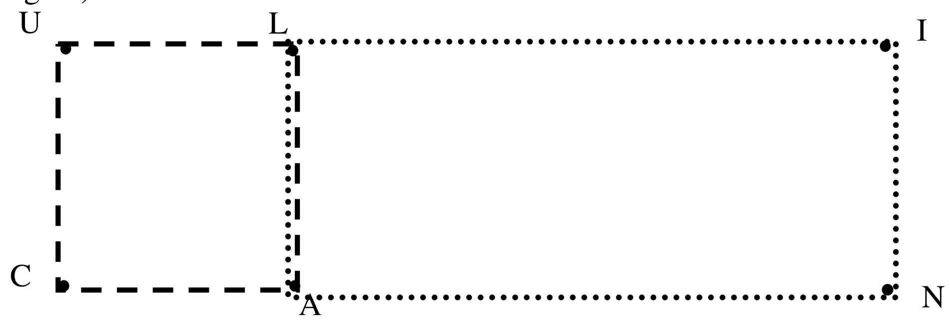
Niveaux : 3, 4

Origine : fj

4. LES TERRAINS DE JEU (Cat. 3, 4)

Dans le pré devant sa maison, Luca a formé un terrain de jeu carré avec un ruban rouge de 20 mètres de long, tendu autour de quatre piquets (marqués L, U, C, A sur la figure).

Lina, par contre, a formé un terrain rectangulaire à côté de celui de Luca, avec un ruban bleu de 40 mètres de long, tendu autour de deux piquets de Luca (L et A) et deux autres piquets (marqués N et I sur la figure).



(Attention, la figure n'est pas précise, mais vous pouvez colorier :
en rouge le ruban de Luca : – – – – – *et en bleu celui de Lina :* ……………… *)*

Les deux enfants décident de tendre maintenant un ruban vert autour des quatre piquets N, I, U, C. Ainsi, ils forment un grand terrain rectangulaire qui réunit les deux petits terrains.

Quelle est la longueur du ruban vert ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie et mesures : carré et rectangle, périmètre

Analyse de la tâche

- Reconnaître dans le dessin la situation décrite dans le texte, repérer les rubans puis établir les liens entre les périmètres du carré et des rectangles.
- Ne pas partir de l'idée que le périmètre d'une figure composée est la somme des périmètres des figures qui la composent.
- Ne pas céder à la tentation d'une proportionnalité inadéquate : « on a doublé le périmètre de 20 à 40, alors il faut aussi doubler les « grandeurs de terrains » ! ce qui conduirait à une aire double et, comme la largeur (5) est constante, à une longueur double, 10 plutôt que 15.
- Dans le cadre des mesures et périmètres (en mètres), on peut procéder avec une des deux méthodes suivantes :
  Déterminer le côté du carré (20 : 4 = 5) ; puis constater que la largeur du rectangle LINA est aussi 5, et calculer sa longueur par la relation 2 × (5 + …) = 40 ou (40 – 5 – 5) : 2 = 15 ; enfin déterminer la longueur du grand rectangle (5 + 15 = 20) et en déduire son périmètre 2 × (5 + 20) = 50.

Ou bien : calculer le côté du carré (LA = 5), puis comprendre que le périmètre du rectangle NIUC est la somme des périmètres de LUCA et LINA diminuée de 2 fois la longueur de LA soit : 20 + 40 – 10 = 50

Niveaux : 3, 4

Origine : fj

5. LES TABLES DE MULTIPLICATION (Cat. 3, 4, 5)

Riccardo doit mémoriser les tables de multiplication, de celle du 2 jusqu'à celle du 9. (Il connaît déjà bien la table du 0, celle du 1 et celle du 10 qui sont très faciles.)
Sa maman, pour l'encourager, lui a expliqué qu'il ne reste pas beaucoup de multiplications à apprendre, parce qu'en échangeant les deux nombres multipliés on obtient le même résultat. Ainsi, par exemple, $2 \times 3 = 3 \times 2$ ou $7 \times 4 = 4 \times 7$.

Combien y a-t-il de multiplications différentes que Riccardo doit se rappeler pour connaître toutes les tables de multiplication du 2 au 9 ?

Montrez, par une liste ou un tableau, comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplications, commutativité
- Combinatoire : dénombrements

Analyse de la tâche

- On peut organiser un tableau avec toutes les tables de multiplication avec la colonne du 2, du 3, ... ; on observe que dans la colonne de la table de multiplication du 2 il y a 8 multiplications à apprendre, dans celle du 3 il y a seulement 7 nouvelles multiplications, dans celle du 4 il y en a 6, et ainsi de suite jusqu'à celle du 9 où il y a seulement 9 x 9 à retenir. Donc, il n'y a à retenir pour toutes les multiplications que 36 d'entre elles :
$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

2×1	3×1	4×1	5×1	6×1	7×1	8×1	9×1
2×2	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2	9×2
2×3	**3×3**	4×3	5×3	6×3	7×3	8×3	9×3
2×4	**3×4**	**4×4**	5×4	6×4	7×4	8×4	9×4
2×5	**3×5**	**4×5**	**5×5**	6×5	7×5	8×5	9×5
2×6	**3×6**	**4×6**	**5×6**	**6×6**	7×6	8×6	9×6
2×7	**3×7**	**4×7**	**5×7**	**6×7**	**7×7**	8×7	9×7
2×8	**3×8**	**4×8**	**5×8**	**6×8**	**7×8**	**8×8**	9×8
2×9	**3×9**	**4×9**	**5×9**	**6×9**	**7×9**	**8×9**	**9×9**
2×10	3×10	4×10	5×10	6×10	7×10	8×10	9×10

Ou bien : en excluant les tables de multiplication du 1 et du 10, observer qu'il y a 8 produits pour 8 tables de multiplication et donc 64 résultats au total. Il faut enlever pour chaque table de multiplication les produits qui se retrouvent dans les autres tables. Ainsi on doit enlever 7 produits pour la table du 2 (tous à l'exception de 2×2), 6 pour la table du 3 (tous à l'exception de 3×2 et de 3×3), 5 pour la table du 4, 4 pour la table du 5, 3 pour celle du 6, 2 pour celle du 7 et 1 pour celle du 8 ; dans celle du 9 on les garde tous. On trouve donc, avec des soustractions successives, qu'il y a en tout 36 multiplications différentes à retenir.

Ou bien : observer que pour chaque table de multiplication, en excluant celles du 1 et du 10, il y a 8 produits qui ne se répètent pas (2×2, 3×3, 4×4, ... 9×9). Pour les autres, il y a 7 produits dans chaque table de multiplication qui paraissent deux fois, il y en a donc en tout $7 \times 8 = 56$, mais en réalité $56 : 2 = 28$ à retenir ; en additionnant ce résultat, 28, à celui des produits uniques, 8, on obtient $28 + 8 = 36$ multiplications à retenir.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Riva del Garda

6. CHATS GOURMANDS (Cat. 4, 5)

Grand-mère a deux gros chats, Thomas et Duchesse qui aiment beaucoup les biscuits pour chats. Elle donne à ses chats seulement des biscuits entiers.
Thomas mange le même nombre de biscuits chaque jour, Duchesse aussi, mais Duchesse, qui est très gourmande, mange toujours le double des biscuits que mange Thomas.
Grand-mère, aujourd'hui, a acheté un paquet de 100 biscuits. Elle sait que ce sera suffisant pour une semaine, mais pas pour deux semaines.

Quel peut être le nombre de biscuits que chaque chat mange en une semaine ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : double, triple, multiples, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que les quantités de biscuits mangés par les chats augmentent de jour en jour, que si on en donne trop ça ne suffira pas pour une semaine, que si on en donne trop peu, il y en aura pour plus d'une semaine et qu'il faudra trouver une « ration » qui convient à ces deux contraintes.
- Se rendre compte qu'il faut partir du nombre de biscuits donnés à Thomas et faire plusieurs essais : par exemple, en commençant par 1 biscuit par jour pour Thomas, il en faudra 2 pour Duchesse, continuer pour deux jours, trois jours ou directement pour une semaine et trouver 7 pour Thomas, 14 pour Duchesse et 21 en tout. Voir qu'en deux semaines on arriverait à 14, 28 et 42 en tout. Les 100 biscuits seraient suffisants, contrairement à ce que dit l'énoncé. Répéter ainsi des essais par additions successives, multiplications par 7 … pour déterminer une ou plusieurs possibilités qui conviennent. Par exemple avec 3 biscuits par jour pour Thomas on arrive à une consommation de 63 biscuits en une semaine et on dépasse 100 en deux semaines (126).

Ou bien, organiser les essais pour être sûr de trouver toutes les possibilités. Par exemple en les disposant en lignes ou par des tableaux du genre :

Nombre de biscuits par jour pour Thomas	Nombre de biscuits par semaine pour Thomas	Nombre de biscuits par jour pour Duchesse	Nombre de biscuits par semaine pour Duchesse	Nombre de biscuits par semaine pour les deux chats	Nombre de biscuits pour 2 semaines pour les deux chats
1	7	2	14	21	42
2	14	4	28	42	84
3	**21**	**6**	**42**	**63**	**126**
4	**28**	**8**	**56**	**84**	**168**
5	35	10	70	105	210

Éliminer les deux premières lignes, car il y aurait assez de biscuits pour 2 semaines, et la dernière car 100 biscuits suffisent pour une semaine.

Et conclure qu'il y a deux possibilités : ou Thomas mange 21 biscuits par semaine et Duchesse 42 ou Thomas mange 28 biscuits par semaine et Duchesse 56.

Ou bien, pour les élèves qui maîtrisent déjà bien le concept de multiples : se rendre compte que le nombre de biscuits mangés chaque jour par les deux chats doit être un multiple de 3.

- En déduire que le nombre de biscuits mangés par les deux chats en une semaine est un multiple de 7 et de 3 (donc de 21) inférieur à 100: 21, 42, 63, 84.
- Écarter 21 et 42 parce que leur double est inférieur à 100, les 100 biscuits seraient alors suffisants pour deux semaines. Conclure que le nombre de biscuits mangés par les deux chats en une semaine est 63 ou 84.
- Comprendre que, comme chaque jour de la semaine, Duchesse mange le double de biscuits de ce que mange Thomas, ce dernier mange le tiers des biscuits donnés aux deux chats.
- En déduire que si les deux chats mangent 63 biscuits en une semaine, alors Thomas en mange 63 : 3 = 21 et Duchesse en mange 42. Alors que si les deux chats mangent 84 biscuits en une semaine, alors Thomas en mange 84 : 3 = 28 et Duchesse 56.

Ou : diviser 63 et 84 par 7 et trouver la quantité journalière de biscuits mangés par les deux chats : 9 et 12. Comme Duchesse mange le double de biscuits de ce que mange Thomas, en déduire que dans le premier cas, Thomas mange chaque jour 3 biscuits et Duchesse 6, et dans le second cas, Thomas mange chaque jour 4 biscuits et Duchesse 8.

En multipliant par 7, on trouve la quantité de biscuits mangés par les deux chats en une semaine (21 Thomas et 42 Duchesse dans le premier cas et 28 Thomas et 56 Duchesse dans le second cas).

Niveaux : 4, 5

Origine : Siena

7. LE PIRATE BARBENOIRE (II) (Cat. 5, 6)

Le pirate Barbenoire a caché un sac de pièces d'or d'une valeur totale de 1000 écus. Dans le sac il y a exactement 5 sortes de pièces : des pièces de 5, 10, 20, 50 et 100 écus.
Barbenoire se rappelle qu'il y a en tout 72 pièces et qu'il y a 20 pièces de 5 écus, tandis qu'il y en a 40 de 10 écus.

D'après vous, combien de pièces de 20, 50 et 100 écus Barbenoire a-t-il mis dans le sac ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication, division avec des nombres naturels
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Calculer la valeur des pièces de 5 et 10 écus soit 500 écus (20 x 5 + 40 x 10). Comprendre que les 12 pièces restantes de 20, 50 et 100 écus ont une valeur totale de 500 écus
- Comprendre qu'il y a plusieurs combinaisons possibles de pièces de 20, 50 et 100 qui correspondent à 500 écus.
- Comprendre que le nombre des pièces de 100 écus peut être au plus égal à 3 (sinon, avec 4 pièces de 100 écus et une pièce de 50, on ne pourrait pas trouver un nombre de pièces de 20 qui donne 50).
- Comprendre que les pièces de 50 écus peuvent être au nombre de 2, 4 ou 6 et que le nombre des pièces de 20 écus doit être un multiple de 5.
- Organiser une recherche systématique qui permet de trouver les six combinaisons possibles :

3 de 100	2 de 100	2 de 100	1 de 100	1 de 100	**1 de 100**
2 de 50	2 de 50	4 de 50	2 de 50	4 de 50	**6 de 50**
5 de 20	10 de 20	5 de 20	15 de 20	10 de 20	**5 de 20**

- Choisir parmi ces combinaisons celle qui utilise 12 pièces (la dernière)

Ou bien : après avoir remarqué que le nombre de pièces de 20 écus est un multiple de 5, ce nombre doit être inférieur à 12, il peut donc être égal à 5 ou à 10. Mais avec 10 pièces de 20 écus, il reste 2 pièces pour obtenir 300 écus, ce qui est impossible. La seule possibilité est donc qu'il y ait 5 pièces de 20 écus. Il reste donc 7 pièces pour obtenir 400 écus. S'il n'y avait que des pièces de 50 écus, cela ferait 350 écus, il faut donc remplacer une pièce de 50 par une pièce de 100. Ce qui donne au final, 5 pièces de 20, 1 pièce de 100 et 6 pièces de 50.

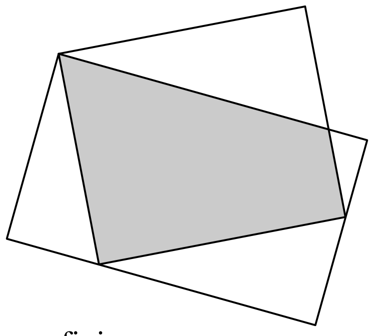
Ou bien : procéder par essais non organisées (ce qui n'assure pas l'unicité de la solution).

Niveaux : 5, 6

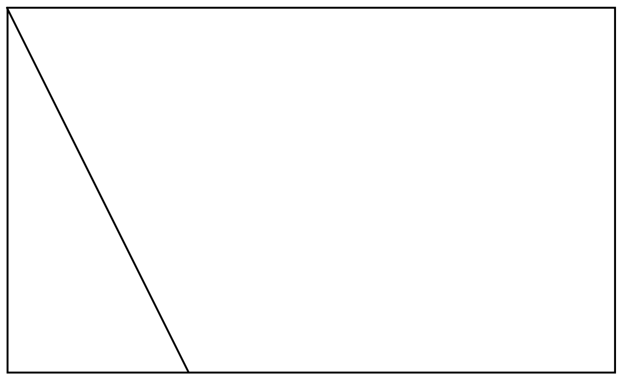
Origine : Valle d'Aosta

8. RECTANGLES AGRANDIS (Cat. 5, 6, 7)

Ce dessin de deux rectangles plaît beaucoup à Julie et elle a décidé de le reproduire, mais en l'agrandissant.



Elle a commencé à réaliser ce nouveau dessin, mais elle ne l'a pas fini :



Complétez le dessin que Julie n'a pas fini.

Expliquez comment vous avez fait.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

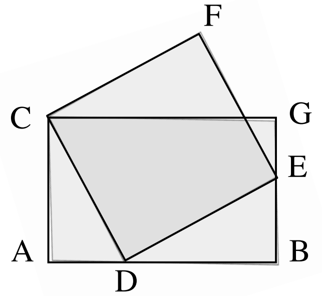
- Géométrie : rectangles, droites perpendiculaires, angles droits, agrandissements, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que la figure à compléter est plus grande que la figure donnée, qu'elle doit conserver les formes rectangulaires et la position de sommets du rectangle à construire sur les côtés du rectangle déjà construit (D) et (E), même si les directions sont modifiées (comme les dimensions).
- Comprendre que la tâche consiste à construire un rectangle à partir d'un de ses côtés.
- Se rendre compte que pour construire le deuxième rectangle à partir d'un de ses côtés, il faut tracer les autres côtés de façon à former quatre angles droits, mais aussi de façon à obtenir un agrandissement de la figure donnée, en particulier avec un sommet du deuxième rectangle sur une largeur du premier (E).
- Construire successivement les trois côtés manquants :

  tracer la perpendiculaire au segment CD, passant par D, qui coupe le côté BG en E ;

  puis construire les deux autres côtés par parallélisme, ou perpendicularité, ou isométrie des côtés opposés, ou isométries des diagonales qui se coupent en leur milieu, …



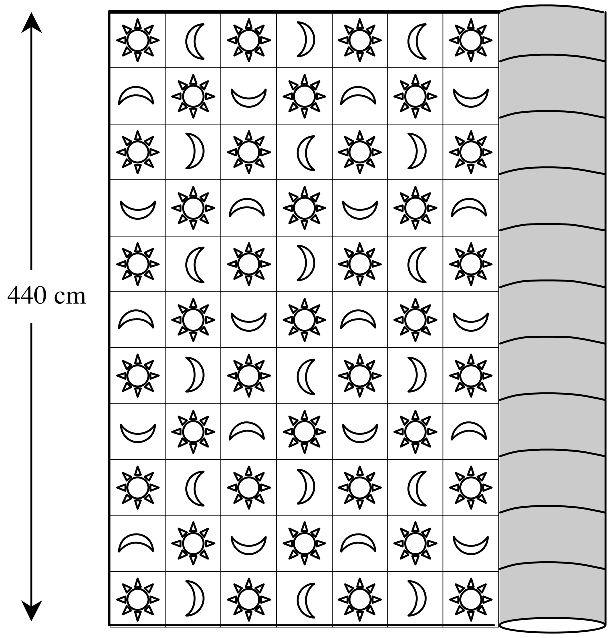
Ou bien, au cas où les élèves connaîtraient la similitude, déterminer la position du point E en utilisant le rapport entre les dimensions de la petite figure de départ et celles de la grande figure à construire, puis compléter le rectangle cherché en utilisant une des procédures précédentes.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : groupe de géométrie plane

9. TAPIS A DEROULER (Cat. 5, 6, 7)

Pour son salon, Philippe a acheté un très grand tapis de 680 cm de longueur et 440 cm de largeur, formé d'un pavage de petits carrés avec des soleils et des croissants de lune disposés comme sur la figure. Il commence à le dérouler et remarque que dans la partie visible, il y a plus de soleils que de lunes.



Lorsque le tapis sera entièrement déroulé, y aura-t-il le même nombre de soleils et de lunes ? Expliquez votre réponse et dites combien de soleils et de lunes sont dessinés sur le tapis entier.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, addition
- Géométrie : rectangle et carré
- Mesures : unités de mesures de longueur, proportionnalité entre longueurs et nombres de carreaux

Analyse de la tâche

- Vérifier l'affirmation de Philippe en dénombrant sur la partie déroulée du tapis 39 soleils et 38 lunes.
- Percevoir les régularités dans la disposition des motifs : dans les colonnes impaires (comme la 1e à gauche) 6 soleils et 5 lunes, et dans les colonnes paires 5 soleils et 6 lunes.
- Faire un dessin (ou poursuivre celui de la figure par-dessus la partie non déroulée) avec les motifs soleil/lune en respectant la taille des carrés sur le dessin et, pour les 680 cm, l'échelle utilisée pour les 440 cm, puis se demander où il faudra s'arrêter et comprendre que ce sera lorsque les 680 cm auront été atteints.
- Représenter ainsi un total de 17 colonnes de carrés, et dénombrer alors 94 soleils et 93 lunes, donc plus de soleils que de lunes.

Ou : En comptant sur le dessin 11 carreaux sur la largeur de 440 cm, on en déduit la longueur des côtés des carreaux : 40 cm (440 : 11 = 40). Sur la longueur de 680 cm, il y a donc 17 carreaux (680 : 40 = 17). Ainsi, le tapis est formé de 17 colonnes de 11 carreaux chacune, soit 187 carreaux en tout.

- Remarquer que 187 est un nombre impair, donc il ne peut pas y avoir autant de soleils que de lunes.
- Se dispenser de terminer le dessin pour le remplacer par le tableau suivant, construit sur l'alternance des 5 et des 6

N° Colonne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Nb de soleils	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6
Total soleils	6	11	17	22	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94
Nb de lunes	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5
Total lunes	5	11	16	22	27	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93

et retrouver à la fin les 94 soleils et les 93 lunes.

Ou : Remarquer que le motif répète identiquement deux colonnes, l'une commençant par un soleil, l'autre par une lune. Sur deux telles colonnes successives, il y a autant de soleils que de lunes : 11.

Avec 17 colonnes il y a 8 couples de colonnes qui présentent donc 88 soleils et 88 lunes et une dernière colonne qui contient 6 soleils et 5 lunes, d'où, en tout, 94 soleils et 93 lunes.

- Conclure qu'il y a un soleil de plus (94) que de lunes (93) par une des très nombreuses méthodes possibles : dessin complet ; considérations sur les colonnes impaires (6 soleils et 5 lunes) et paires (5 soleils et 6 lunes) ; calcul colonne par colonne ; décomposition de 187 en 93 + 94 ; etc.

Ou, lorsque le côté d'un carré est déterminé (40) passer par l'aire du rectangle et l'aire du carré pour trouver le nombre de carrés (680 x 440) : (40 x 40) = 187 puis 187 : 11 = 17. (Cette procédure n'est pas la plus directe !! mais a été choisie plusieurs fois dans le problème d'origine).

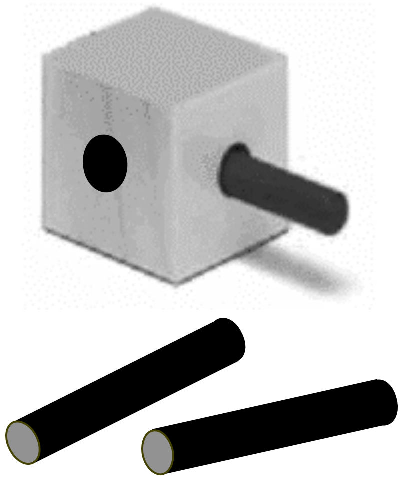
Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Reprise de 18.II.8 par le Groupe proportionnalité

10. LES CONSTRUCTIONS DE LA GRAND-MERE (Cat. 5, 6, 7)

Christine a trouvé dans le grenier de sa grand-mère une vieille boîte de constructions contenant des cubes et des chevilles en bois. Elle a observé que les cubes ont certaines faces trouées et d'autres non.

Christine décide alors d'assembler huit cubes ensemble pour construire un grand cube n'ayant pas de trou visible. Elle commence à réunir deux cubes en joignant deux faces trouées avec une cheville et continue ainsi de telle sorte que toutes les faces juxtaposées soient fixées avec une cheville.



De combien de chevilles Christine s'est-elle servie pour assembler tous les cubes ?

Combien chacun des cubes utilisés par Christine a-t-il de faces trouées ? Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Géométrie : vision dans l'espace, le cube et ses propriétés

Analyse de la tâche

- Savoir que le cube est un solide à 6 faces toutes identiques.
- Comprendre que le grand cube est composé de deux couches de quatre petits cubes chacune.
- En déduire qu'il faut 4 chevilles pour joindre les cubes entre eux dans chaque couche.
- Comprendre que, pour réunir les deux couches, 4 chevilles sont encore nécessaires et conclure que le nombre de chevilles nécessaires pour construire le grand cube est 12 (4 + 4 + 4 = 12).
- Comprendre ensuite que chaque cube est alors relié à trois autres et en déduire qu'il doit y avoir 3 faces trouées dans chaque cube, car les trois autres sont visibles sur la surface externe du grand cube qui doit être sans trous.

Ou bien : comprendre que chaque cube est relié à trois autres et qu'il y a 3 x 8 = 24 faces jointes (3 faces par cube multiplié par le nombre de cubes, 8) ; il suffit d'une cheville pour relier deux faces, le nombre de chevilles est donc la moitié du nombre de faces jointes : 24 : 2 = 12.

- Formuler correctement les deux réponses avec des explications complètes : 12 chevilles sont nécessaires pour réunir tous les cubes, il y a 3 faces trouées dans chaque cube, parce que les trois autres faces des petits cubes sont visibles de l'extérieur et ne doivent donc pas être trouées.

Ou bien : dessiner une représentation précise montrant 3 faces trouées et compter les chevilles et les faces trouées.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Rozzano

11. LA MAQUETTE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Dans la classe de Fabio, les élèves ont fait une maquette d'un petit village. Les maisons étaient construites avec des cubes de bois, tous les mêmes, qui ont été collés sur une base divisée en carrés. Pour obtenir des maisons à plusieurs étages, ils ont collé des cubes les uns sur les autres.
La maquette est maintenant sur le bureau. La figure A montre le dessin de la maquette vue du dessus. La figure B, au contraire, montre le dessin de la maquette comme la voit Fabio qui est assis sur son banc.

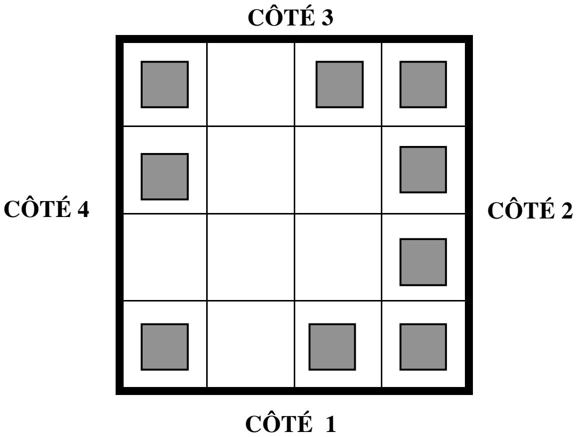


Fig. A. la maquette vue du dessus

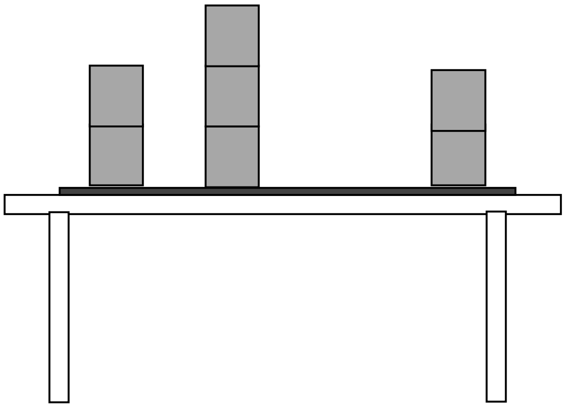


Fig B. la maquette vue par Fabio

Quel côté de la maquette est en face de Fabio ?

Quel est le nombre maximum de cubes qui ont été utilisés pour construire les maisons de la maquette ?

Donnez vos réponses et expliquez le raisonnement que vous avez fait.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : vision dans l'espace, points de vue

Analyse de la tâche

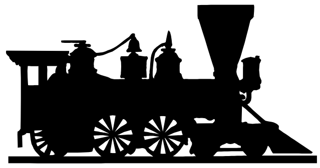
- Pour comprendre quel côté de la maquette est devant de Fabio, il faut considérer la figure A et observer la maquette par la pensée en la regardant par chacun de ses côtés. On doit alors comparer ce que l'on imagine avec ce qui est montré dans la figure B. L'opération est plus facile si on tourne la feuille pour regarder la figure A successivement par chacun de ses côtés.
- En déduire que Fabio ne peut pas voir le CÔTÉ 1 de la maquette, sinon d'après la figure B, la maison isolée devrait être à droite et non à gauche. Il ne peut pas voir la maquette par le CÔTÉ 4 ni par le CÔTÉ 2, sinon il verrait aussi une maison dans l'espace vide de la figure B. Conclure que Fabio ne peut voir la maquette telle qu'elle apparaît dans la figure B que par le CÔTÉ 3.
- Pour estimer le nombre maximum de cubes utilisés dans la construction des maisons, il faut partir de la figure B.
  - Remarquer qu'à gauche on voit deux cubes, donc 2 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante sur la figure A, vue du côté 3 (il y a 4 maisons, car toutes les cases sur cette colonne dans la figure A sont occupées).
  - En se déplaçant vers la droite dans la figure B, on peut voir ensuite 3 cubes, donc 3 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante de la maquette (il y a 2 maisons, car 2 cases sont occupées dans cette colonne de la fig. A).
  - Enfin on peut encore voir deux cubes à droite, donc 2 est le nombre maximum de cubes pour chacune des maisons qui se trouvent dans la colonne correspondante de la maquette (il y a 3 maisons, car trois cases sont occupées dans cette colonne de la figure A).
- En déduire que le nombre maximum de cubes est alors (2 x 4) + (3 x 2) + (2 x 3) = **20**.

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Groupe géométrie dans l'espace

12. VOYAGE EN TRAIN (Cat. 6, 7, 8)

En Transalpie des trains quittent Mathépolis toutes les heures sonnantes (00 minute) en direction de Géocity. D'autres trains quittent aussi Géocity toutes les heures sonnantes en direction de Mathépolis.
La durée du trajet est exactement de 10 h pour tous les trains.



Pendant son trajet, combien chaque train croise-t-il de trains roulant en sens inverse ?

Expliquez votre raisonnement.

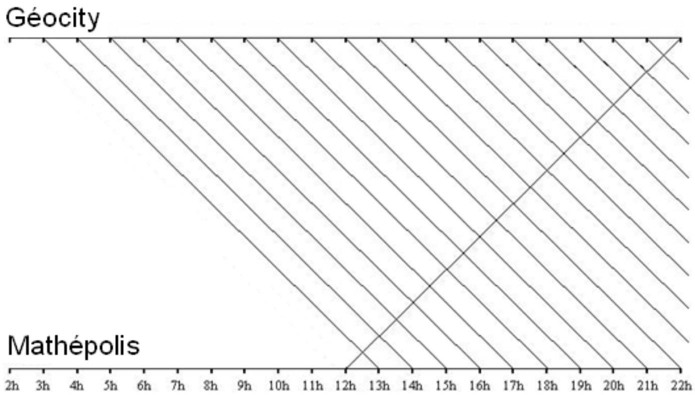
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique

Analyse de la tâche

- Trouver une façon de modéliser la situation (tableau, droite graduée, dessin, …). Par exemple pour un train partant de Mathépolis à 12 h 00, le premier train qu'il croise est celui qui est parti de Géocity à 3 h 00 (il ne croise pas celui de 2 h 00, qui arrive a 12 h 00) :



On compte 19 rencontres sur le graphique, toutes les ½ h, de 12 h 30 à 21 h 30.

Ou: Distinguer trois "sortes" de trains:

- Ceux qui sont déjà en route, à savoir les trains partis il y a 9 h, 8 h... et 1 h. Ils sont au nombre de 9;
- Celui qui part au même moment, mais de l'autre gare;
- Ceux qui partiront après le départ du train considéré, à savoir ceux partant après 1 h, 2 h... et 9 h, au nombre de 9.

En tout il y a donc 9 + 1 + 9 = 19 trains rencontrés.

Niveau : 6, 7, 8

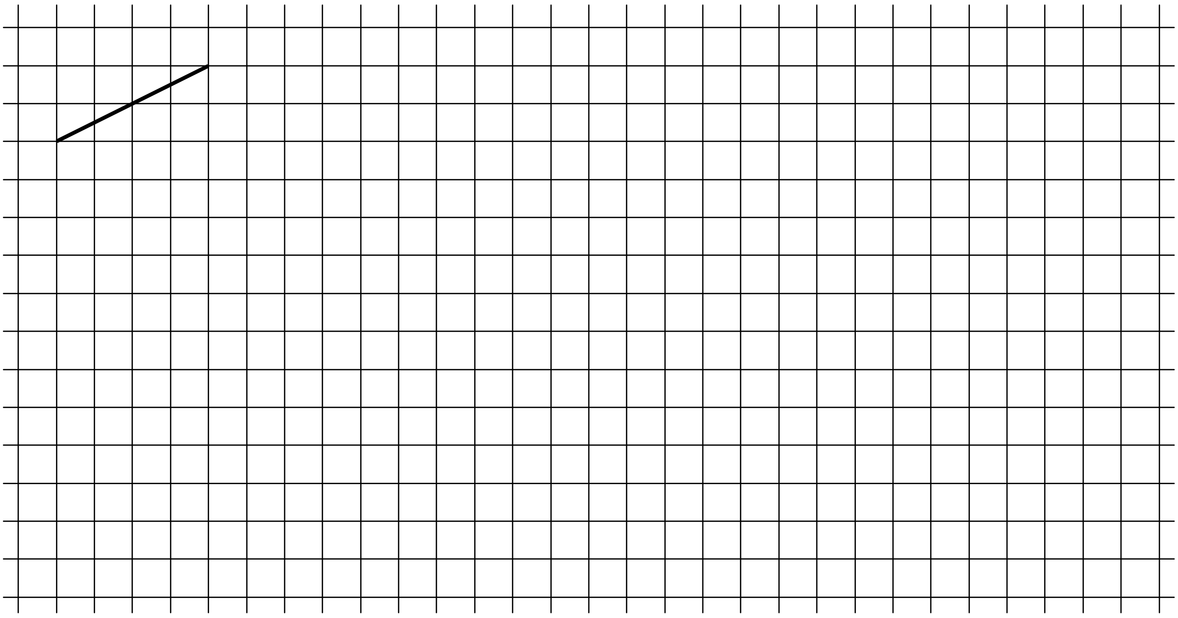
Origine : Luxembourg

13. DECOUPAGE DE TRIANGLES (Cat. 6, 7, 8)

Christine découpe des triangles dans une feuille quadrillée.
Tous ses triangles ont :
- deux côtés de même longueur que le segment déjà dessiné dans le quadrillage ci-dessous ;
- tous leurs sommets sont sur des points d'intersection du quadrillage.

Combien Christine peut-elle découper de triangles différents ?
(Qu'elle ne peut pas superposer après les avoir découpés.)

Dessinez-les tous sur le quadrillage ci-dessous.



ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie : angles, triangles isocèles, figures planes isométriques
- Logique : déductions

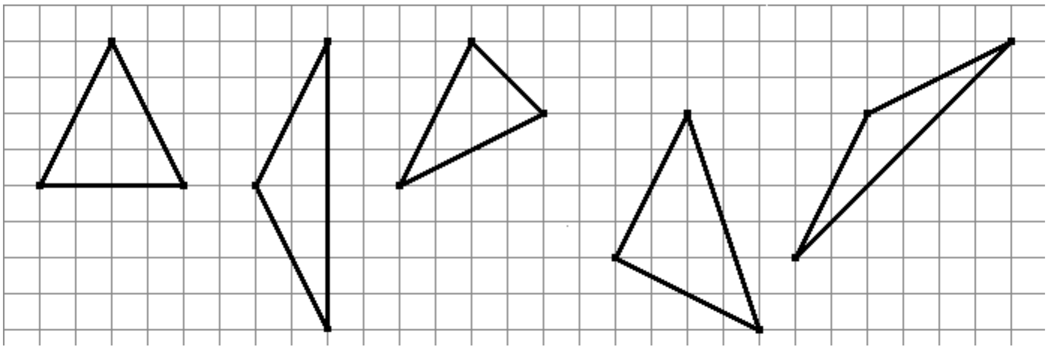
Analyse de la tâche

- Comprendre toutes les conditions à respecter pour la construction des triangles :
  - les triangles doivent être isocèles,
  - les côtés égaux ont la même longueur que le segment indiqué,
  - le troisième sommet doit être sur un point d'intersection du quadrillage,
  - les triangles doivent être tous différents (non isométriques).
- Se rendre compte, que les deux côtés de même longueur sont des diagonales de rectangles de dimensions 2 et 4 (l'unité est le côté d'un carreau du quadrillage).
- Procéder systématiquement : par exemple, considérer tous les segments qui peuvent être tracés à partir d'une des extrémités du segment indiqué et qui soient des diagonales de rectangles 2 × 4 et construire un triangle isocèle avec chacun d'eux et avec le segment donné. Écarter ensuite ceux qui sont de mêmes formes (isométriques ou superposables) que des triangles déjà obtenus.

Ou bien : se rendre compte qu'après avoir dessiné le segment sur le quadrillage, que le troisième sommet du triangle doit être sur le cercle de centre une extrémité et de rayon égal à la longueur du segment indiqué. Dessiner soigneusement un tel cercle et déterminer les points du quadrillage qui se trouvent sur le cercle. Considérer les triangles ainsi formés et, à cause de l'imprécision du dessin, vérifier qu'ils sont isocèles en utilisant le quadrillage et éliminer ceux qui sont de même forme (isométriques ou superposables) à d'autres déjà obtenus.

Ou bien : procéder par essais non organisés à partir du segment indiqué.

- Obtenir dans tous les cas que Christine peut trouver 5 triangles de formes différentes et les dessiner, par exemple, comme ci-dessous, indépendamment de la position du segment de l'énoncé :



Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Rozzano

14. CHASSE AU TRESOR (Cat. 7, 8, 9, 10)

L'autre jour, en fouillant dans le grenier, Marc a découvert une vieille malle qui contenait un parchemin et un coffre. En lisant le parchemin, il a compris que le coffre contenait un trésor protégé par une serrure avec une combinaison à 3 chiffres (de 1 à 9). En outre, le parchemin donnait ces informations :

a) dans 3|4|5 un seul des chiffres est correct, mais n'est pas bien placé
b) dans 2|3|6 aucun de ces chiffres n'est correct
c) dans 6|7|8 un seul chiffre est correct et bien placé
d) dans 4|7|2 un seul chiffre est correct et bien placé
e) dans 8|5|9 deux chiffres sont corrects, mais un seul est bien placé
f) dans 5|8|2 un seul chiffre est correct et bien placé

Pouvez-vous aider Marc à trouver la bonne combinaison pour ouvrir le coffre.

Expliquez comment vous avez résolu ce problème.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique

Analyse de la tâche

- Comprendre les informations données dans l'énoncé. Éliminer les chiffres incorrects 2, 3, 6 selon les indications données dans *b*).
- La première information, comparée à la seconde, implique que l'un des chiffres est 4 ou 5.
- Si ce chiffre est 4, il doit être en première position d'après *d*) et 7 est incorrect. D'après *c*) et *b*), 8 est correct et placé en troisième position. Alors, d'après *e*) et *a*), 9 est correct, mais ni 8 ni 9 sont bien placés. L'hypothèse « 4 correct » est donc à rejeter.
- Si d'après *a*) ce chiffre est 5, d'après *f*) 5 est placé en premier et on doit éliminer 8. D'après *c*) et *b*), 7 est correct et placé au milieu. D'après *e*), 9 est correct et placé en dernier. La combinaison est 5 7 9

Ou : après avoir éliminé les chiffres 2, 3, 6, des conditions *c*) et *d*) on déduit deux possibilités : 4 – 8 ou – 7 – . La première est contredite par *f*) où ni 5 ni 8 seraient bien placés et 2 est exclu. La deuxième donne 7 comme chiffre central et élimine 8. La condition *e*) indique que 5 et 9 sont les deux autres chiffres et d'après *f*) la combinaison est 5 7 9. On peut vérifier que toutes les conditions sont respectées.

Ou : adopter la stratégie qui consiste à appliquer à chaque donnée la contrainte la plus forte, la condition *b*), car elle permet d'en simplifier 4 autres :

a) devient :	dans	–	4	5	un seul de ces chiffres est correct, mais n'est pas bien placé
c) devient :	dans	–	7	8	un seul chiffre est correct et bien placé
d) devient :	dans	4	7	–	un seul chiffre est correct et bien placé
e) reste :	dans	8	5	9	deux chiffres sont corrects, mais un seul est bien placé
f) devient :	dans	5	8	–	un seul chiffre est correct et bien placé

On en déduit d'après *a*) que soit 4 est correct et placé en premier, ce qui élimine 7 mais est contraire à *c*) et *f*) ; soit 5 est correct, placé en premier d'après *a*), ce qui élimine 8 d'après *f*), donc 7 est correct au centre et 9 est le troisième chiffre cherché d'après *e*). Il y a donc une seule combinaison possible pour ouvrir le coffre : **5 7 9**.

Niveaux : 7, 8, 9, 10 **Origine :** Riva del Garda

15. MARCHE AUX PUCES (Cat. 8, 9, 10)

Au stand des livres d'occasion, Philippe veut acheter quelques anciens numéros de « Mickey », « Tintin » et « Spirou ». Les prix varient selon la bande dessinée et Philippe remarque que :

- un numéro de « Tintin » coûte 0,60 euro de plus qu'un numéro de « Spirou » ;
- pour le même prix, on peut avoir deux numéros de « Mickey » ou bien un numéro de « Spirou » et un numéro de « Tintin » ;
- il y a 1,70 euro de différence entre le prix de trois numéros de « Tintin » et deux numéros de « Mickey ».

À votre avis, combien coûte au marché aux puces un numéro de « Spirou » ?

Un numéro de « Tintin » ? Un numéro de « Mickey » ?

Donnez votre réponse et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations avec des nombres décimaux.
- Algèbre : passage du langage naturel au langage algébrique ; mise en équations d'un problème et résolution d'un système d'équations

Analyse de la tâche

- Lire les informations avec une attention particulière pour les expressions importantes comme « de plus que », « différence entre », « ou bien … ou bien ».
- Traduire les informations données en langage algébrique par des égalités, utilisant des notations appropriées. Par exemple, indiquer par T le coût en euro d'un numéro de « Tintin », par M celui d'un numéro de « Mickey » et par S celui d'un numéro de « Spirou ».
- Exprimer les trois conditions données sous la forme suivante :

  $T = S + 0{,}60$ $\qquad$ $2M = S + T$ $\qquad$ $3T – 2M = 1{,}70$
- En remplaçant $2M$ par $S + T$ (deuxième équation) dans la troisième équation, obtenir $2T = S + 1{,}70$; puis remplacer T par $S + 0{,}60$ (première équation) pour obtenir $S = 0{,}50$. Déduire de la première condition que $T = 1{,}10$ et de la seconde que $M = (1{,}10 + 0{,}50)/2 = 0{,}80$.

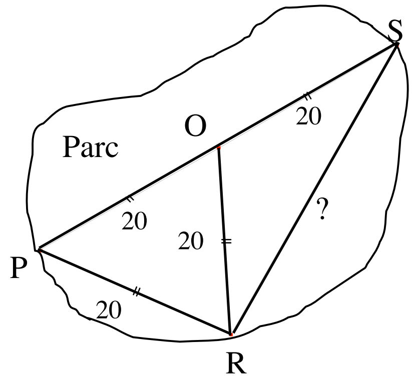
Ou bien : sans formaliser, mais éventuellement avec l'aide de diagrammes ou de dessins, déduire des deuxième et troisième conditions que deux numéros de « Tintin » coûtent le prix d'un numéro de « Spirou » plus 1,70 euro. Mais comme, d'après la première condition, un numéro de « Tintin » coûte le prix d'un numéro de « Spirou » plus 0,60 euro, on en déduit qu'un numéro de « Tintin » coûte 1,70 - 0,60 = 1,10 euro.

Ou bien : procéder par essais pour fixer le coût en euro d'un numéro de « Spirou », déterminer ensuite, à partir de la première et la seconde condition, celui d'un numéro de « Tintin » et celui d'un numéro de « Mickey », puis vérifier si la troisième condition est respectée. Continuer en modifiant la valeur initiale pour obtenir finalement la vérification de toutes les conditions.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena

16. RENCONTRE DANS LE PARC (Cat. 8, 9, 10)



Deux amis, Pierre et Robert, se sont donné rendez-vous dans un petit parc. A l'heure convenue, ils pénètrent dans le parc par deux entrées différentes (P et R sur la figure), éloignées de 20 m en ligne droite.

Ils avancent alors sur deux allées rectilignes et se rencontrent (en O) après avoir marché chacun 20 m.

Ils continuent ensemble sur une même allée rectiligne de 20 m et se trouvent ainsi devant une sortie (S) du parc, distante de 40 m en ligne droite de l'entrée (P) de Pierre.

À quelle distance, en ligne droite, cette sortie se trouve-t-elle de l'entrée empruntée par Robert ? (Donnez cette distance au centimètre près).

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : somme des angles d'un triangle, angles supplémentaires, angle droit, triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, théorème de Pythagore
- Arithmétique : racine carrée, approximation numérique

Analyse de la tâche

Observer le dessin et conjecturer que le triangle PRS est rectangle en R.

- Pour démontrer cela, remarquer que le triangle POR est équilatéral, ayant ses 3 côtés de même longueur. On en déduit que l'angle ROS mesure 120° (= 180° – 60°), comme angle extérieur à l'angle POR du triangle équilatéral. Comme le triangle ROS est isocèle, ses angles en R et S mesurent 30°. L'angle PRS mesure donc 60° + 30° = 90°.

  Ou : observer que le triangle PRS est inscrit dans le demi-cercle centré en O et de rayon 20 m.

Appliquer le théorème de Pythagore pour calculer la mesure de RS.

On obtient $RS^2 = (2 \times 20)^2 - 20^2 = 3 \times 20^2$, d'où $RS = 20\sqrt{3}$, ce qui donne avec l'approximation demandée : RS = 34,64 m à 1 cm près.

Ou bien, en traçant la hauteur OH issue de O du triangle équilatéral qui est aussi une médiane, et en traçant la parallèle à PR passant par O qui coupe RS en son milieu M, on obtient un rectangle OMRH où $RM = OH = 20\sqrt{3}/2 \approx 17{,}320$ m (propriété de la hauteur d'un triangle équilatéral ou théorème de Pythagore). La longueur SR est alors le double : 34.64 m à 1 cm près.

Ou bien, constater que le triangle PSR est un triangle rectangle avec un angle de 30°, il est donc la moitié d'un triangle équilatéral de côté SP dont SR est la hauteur. D'où $SR = SP\sqrt{3}/2 = 40\sqrt{3}/2 = 34{,}64$ m à 1 cm près.

Ou bien, après avoir vu que le triangle ORS est isocèle, en traçant sa hauteur issue de O, on obtient deux triangles rectangles symétriques. La longueur de la projection de OR sur RS peut être obtenue par les propriétés des triangles rectangles ayant des angles de 30° et de 60°, et on obtient la longueur RS en multipliant par deux : $RS = 2OR\cos 30° = 2 \times 20\sqrt{3}/2 = 34{,}64$ m à 1 cm près.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma

17. A LA RECHERCHE DU CARRE (Cat. 8. 9, 10)

Voici le début d'un tableau dans lequel on a écrit, dans l'ordre, les nombres entiers à partir de 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59	60	...				

Sur ce tableau, on déplace un cadre carré qui entoure neuf nombres, disposés sur trois colonnes et trois lignes. Le cadre entoure ici des nombres des 2e, 3e et 4e lignes et des 6e, 7e, 8e colonnes.
La somme des neuf nombres de ce carré est 297.

Peut-on placer le cadre pour que la somme des neuf nombres qu'il entoure soit 900 ?

Et 1062 ?

Si oui, indiquez la position du cadre et expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si non indiquez pourquoi ce n'est pas possible.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : multiples, moyenne, suites régulières de nombres

Algèbre : utilisation du langage algébrique pour décrire et généraliser une situation ; équations du premier degré.

Analyse de la tâche

- Vérifier que la somme des neuf nombres inclus dans le cadre de la figure est 297, puis observer que, lorsqu'on le déplace, la somme de ces nombres varie.
- Calculer la somme dans d'autres positions pour comprendre comment elle varie. En organisant ces calculs de manière systématique on constate que la somme des 9 premiers nombres encadrés est 135 puis, par déplacements successifs du cadre vers la droite d'une colonne à la fois, cette somme devient 144 puis 153, 162, … 225 (progression arithmétique de raison 9).

  Verticalement, les déplacements successifs du cadre d'une ligne à la fois font apparaître des différences de 117 (39 x 3 ou 13 x 9 selon la manière de compter) : 135, 252, 369, ...

  En combinant ces déplacements verticaux avec des déplacements horizontaux on peut arriver à 900 (sans même constater que les sommes sont des multiples de 9).

Ou, après avoir effectué plusieurs vérifications, constater que la somme des 9 nombres vaut 9 fois le nombre du centre ou que le nombre du centre est la moyenne des 9 nombres. Il suffit alors de recherche 100 pour le cadre de somme 900 et 118 (1062 : 9) pour le cadre de somme 1062.

Les nombres centraux étant connus, il faut déterminer leur position dans le tableau, pour pouvoir répondre à la demande de l'énoncé et, simultanément, vérifier qu'ils ne sont pas sur la première ou la dernière colonne (parce que dans chacun de ces deux cas, il ne serait pas possible de placer le cadre). Lorsqu'on a compris l'importance des deux nombres 9 et 13 dans cette situation (tableau de lignes de 13 nombres, cadres de 9 nombres), une méthode possible est de se référer au reste et au quotient d'une division euclidienne par 13 pour situer le centre :

$100 = 7 \times 13 + 9$ se situe sur la 8e ligne et sur la colonne « 9 »,

$118 = 9 \times 13 + 1$ se situe sur la 10e ligne et sur la colonne « 1 ».

- Conclure que la somme de 900 s'obtient avec le cadre sur les lignes 7, 8, 9 sur les colonnes 8, 9, 10, et qu'il n'est pas possible d'obtenir une somme de 1062 car 118 est sur la première colonne et un cadre centré sur 118 n'entourerait pas 9 nombres.

Ou bien : observer que les nombres présents sur chaque colonne sont en progression arithmétique de raison 13 puisque sur chaque ligne il y a 13 nombres consécutifs. Dans un cadre de 3 x 3, comme celui de la figure, si n désigne le nombre en haut à gauche, les deux autres sur la même ligne sont $n + 1$ et $n + 2$. Dans la ligne suivante, les nombres du cadre sont $n + 13$, $(n + 1) + 13$, $(n + 2) + 13$ et dans la troisième, ces nombres sont : $n + 26$, $(n + 1) + 26$, $(n + 2) + 26$. Par conséquent leur somme est égale à $9n + 126$.

- Pour la première question, on obtient donc $9n + 126 = 900$ d'où $n = (900 – 126) / 9 = 86$. Puisque les nombres qui apparaissent dans le tableau dans la dernière colonne à droite sont 65, 78, 91, 104... correspondant à la cinquième, sixième, septième, huitième… ligne respectivement, on en déduit que 86 se trouve dans la septième ligne et sur la huitième colonne et donc le cadre doit être situé sur les lignes 7, 8, 9 et sur les colonnes 8, 9, 10.
- Pour la deuxième question, on devrait avoir $9n + 126 = 1062$ d'où $n = 104$; or 104 se trouve sur la colonne de droite du tableau, il n'est donc pas possible dans ce cas de placer le cadre.

Ou bien comprendre que :

La somme des neuf nombres entourés par un cadre carré peut être obtenue par le triple de la somme des 3 nombres situés sur trois lignes consécutives ;

Chacune de ces sommes de 3 nombres situés sur trois lignes consécutives est le triple du nombre central ;

En passant de la première à la seconde ligne et de la seconde à la troisième ligne, le nombre central de la première ligne est augmenté de 13 puis de 26 respectivement.

Faire alors quelques essais pour obtenir la somme 900. Par exemple avec le nombre 68 considéré comme nombre central du premier triplet, on aura : $3 × 68 + 3 × (68 + 13) + 3 × (68 + 26) = 204 + 243 + 282 = 729$ comme somme des neuf nombres de ce cadre : trop faible. On essaie ensuite 93 et on obtient $279 + 318 + 357 = 954$, trop fort.

Avec des essai mieux ajustés, on arrive à 87 qui donne $261 + 300 + 339 = 900$.

Contrôler ensuite que le cadre avec le nombre 87 dans la position centrale du premier triplet peut être placé dans le tableau, constater que c'est possible et que ce cadre est formé des nombres qui se trouvent sur les lignes 7, 8, 9 et sur les colonnes 8, 9, 10.

Par la même procédure, constater que 1062 peut être obtenu avec le nombre 105 (en effectuant
$3 × 105 + 3 × (105 + 13) + 3 × (105 + 26) = 315 + 354 + 393 = 1062$), mais ce nombre se trouve à la fin de la dixième ligne du tableau, il n'est ainsi pas possible de placer le cadre correspondant.

Niveaux : 8. 9. 10

Origine : Suisse Romande

18. VOYAGE EN AVION (Cat. 9, 10)

Monsieur Rossi est un grand voyageur. Il doit prendre l'avion pour un aller et retour entre la ville Alpha et la ville Bêta qui sont dans deux fuseaux horaires différents.

Voici son plan de vol, avec les heures de départ et d'arrivée exprimées en heures locales.

Aller : départ d'Alpha à 14 h 20, arrivée à Bêta à 19 h 05.

Retour : départ de Bêta à 9 h 35, arrivée à Alpha à 10 h 20.

Aussitôt atterri à Bêta, Monsieur Rossi téléphone à son épouse pour lui dire qu'il est bien arrivé à l'heure exacte prévue.

Sachant que les durées des vols à l'aller et au retour sont les mêmes, à quelle heure son épouse restée à Alpha recevra-t-elle son appel téléphonique ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction avec les heures et les minutes.
- Algèbre : résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues.
- Géographie : fuseaux horaires.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation et le fonctionnement des fuseaux horaires, comprendre que la différence des durées apparentes des deux vols est due à la différence des fuseaux horaires.
- Comparer les durées apparentes des deux vols, à l'aller : 4 heures et 45 minutes, au retour : 45 minutes, d'où une différence apparente entre les deux trajets de 4 h 45 – 0 h 45 = 4 heures.
- En déduire que la différence horaire entre les deux villes est de deux heures : une horloge de Bêta avance de 2 heures par rapport à une horloge d'Alpha.
- Lorsque M. Rossi arrive à Bêta, à Alfa il est 19 h 05 – 02 h 00 = 17 h 05.

Ou bien

- Comprendre que faire la somme des durées apparentes d'un voyage aller et retour revient à annuler le décalage horaire. La durée totale du voyage aller-retour est 5 heures1/2, donc la durée de chaque trajet est 2 h 45.

  Lorsque M. Rossi arrive à Bêta, il est 14 h 20 + 02 h 45 soit 17 h 05 à Alpha.

Ou bien

- Observer que le vol à l'aller est apparemment plus long que celui du retour et conclure que les horloges de Bêta sont en avance sur celles d'Alfa et procéder ensuite à des essais :
  - si les horloges de Bêta avancent d'une heure par rapport à celles d'Alfa, le voyage aller prendrait 3 heures et 45 minutes et le retour 1 heure et 45 minutes : impossible
  - si les horloges de Bêta avancent de deux heures par rapport à celles d'Alfa, le voyage aller prendrait 2 heures et 45 minutes et le retour 2 heure et 45 minutes : c'est l'unique possibilité.
- Lorsque M. Rossi arrive à Bêta, à Alfa il est 14 h 20 + 02 h 45 = 17 h 05.

Ou bien

- Notons x la durée d'un trajet aller ou retour et d le décalage horaire positif entre les 2 villes, on obtient :

  $x + d$ = 4 h 45 et $x - d$ = 0 h 45, par addition x = 2 h 45 ou par soustraction d = 2 h et conclure comme dans l'un ou l'autre des 2 premiers cas ci-dessus.

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

19. LE RECTANGLE A DESSINER (Cat 9, 10)

Est-il possible de dessiner un rectangle de 12 cm sur 2 cm dans une feuille carrée de 10 cm de côté ?

Et un rectangle de 13 cm sur 2 cm ?

Si oui, dites pourquoi et indiquez comment faire ces dessins.

Si non, expliquez pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

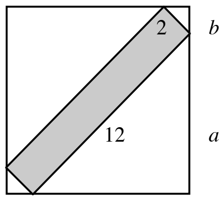
Domaine de connaissances

- Géométrie et mesures : aires, Pythagore, relation entre les longueurs de la diagonale et du côté d'un carré

Analyse de la tâche

- Écarter les réponses non réfléchies comme « oui, car l'aire du rectangle est plus petite que celle du carré » ou « non car sa longueur est supérieure au côté du carré » et se rendre compte qu'on ne peut pas placer les côtés du rectangle parallèlement à ceux du carré.
- Observer que la disposition d'un rectangle ayant la plus grande longueur possible est de placer ses quatre sommets sur les côtés du carré, avec ses axes sur les diagonales du carré.
- Effectuer les calculs pour vérifier si un rectangle 2 x 12 peut être entièrement à l'intérieur du carré 10 x 10. Il y a plusieurs méthodes.

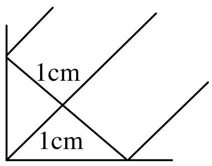
  Par exemple considérer le plus petit carré dans lequel on peut inscrire le rectangle le long d'une diagonale (dessin 1). Utiliser la propriété de Pythagore pour calculer $2a^2 = 144 \rightarrow a = \sqrt{72}$ et $2b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{2}$

  et en déduire la somme $a + b \approx 9{,}9$, ce qui signifie que le rectangle 2 x 12 est inscrit dans un carré d'environ 9,9 cm de côté. Conclure que le dessin est possible.

  Par contre avec un rectangle 2 x 13, $a = \sqrt{(169/2)} = 13/\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, d'où $a + b > 10{,}6$ Le dessin est impossible.

Ou bien, remarquer que le contact de la largeur du rectangle avec deux côtés adjacents du carré forme un triangle rectangle isocèle et donne les mesures du dessin 2.



- En déduire que la diagonale du carré minimal a pour longueur 1 + 12 + 1 = 14 cm pour le rectangle 2 x 12 et 15 cm pour le rectangle 2 x 13.
- Comparer avec la diagonale du carré 10 x 10. Sa longueur est $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm.
- Conclure que le dessin est possible pour le premier et impossible pour le deuxième.

Ou bien, calculer la longueur de la diagonale du carré 10 x 10 en utilisant le théorème de Pythagore : 14,14 cm (environ), et ensuite enlever les 2 segments de diagonale aux extrémités, de longueur 1 cm pour chacun comme indiqué ci-dessus, il reste donc 12,14 cm, ce qui permet de placer le rectangle 12 x 2, mais pas le rectangle 13 x 2.

Niveaux : 9, 10

Origine : gpp

20. LE DEPLACEMENT (Cat. 9, 10)

Un groupe de supporters de l'équipe de football de Transalpie a loué un car pour suivre leur équipe lors d'un déplacement.
Le coût du car est de 900 euros et doit être réparti entre les participants. Si toutes les places étaient occupées, chaque supporter devrait payer 18 euros.
Cependant, finalement quelques places restent vides. Afin de rassembler la somme exacte pour payer le prix du car, les participants décident que chacun d'eux donnera 0,50 euro de plus pour chaque place restée vide.

Combien doit payer chaque supporter ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Algèbre : interprétation de données et passage du langage naturel au langage algébrique ; équations du premier et second degré, annulation d'un produit

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il y a 50 places dans le car (900 : 18) et donc qu'il y a moins de 50 supporters qui participent au déplacement.
- Noter x le nombre de places restées vides et, en utilisant les données de l'énoncé, comprendre que chacun devra payer : $18 + 0{,}50x$ euro.
- Écrire alors l'équation : $(50 - x)(18 + 0{,}50\,x) = 900$, d'où $900 - 18\,x + 25\,x - 0{,}50\,x^2 = 900$,
  il vient : $x\,(7 - 0{,}50x) = 0$, qui a comme solutions 0 (non acceptable) et 14.

Ou : noter y le nombre des participants et, dans ce cas, écrire que chacun devra payer $18 + 0{,}50 \times (50 - y)$ euros.
En déduire alors l'équation : $[18 + 0{,}50 \times (50 - y)]\,y = 900$, d'où : $0{,}50\,y^2 - 43\,y - 900 = 0$, qui a comme solutions 50 (non acceptable) et 36 supporters, d'où 14 places vides.

- Dans les deux cas, calculer ce que chaque supporter devra payer : $18 + 0{,}50 \times 14 = 25$ euros.

Ou : procéder par essais en faisant des hypothèses sur le nombre des participants et éventuellement faire un tableau du type :

nombre de participants	nombre de places vides	prix à payer	Prix total
40	10	18 + 0,5 x 10 = 23	23 x 40 = 920
37	13	18 + 0,5 x 13 = 24,5	24,5 x 37 = 906,5
36	14	18 + 0,5 x 14 = **25**	25 x 36 = **900**

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena