Problèmes	**Categories**								**Thèmes**				**Origine**
1. Du plus petit au plus grand	3											Lo	FC
2. Les chocolats de Victor	3	4										Lo	LUX
3. Une photo d'Afrique	3	4							Ar				UD
4. Les carrés de Paul	3	4	5								Geo		UD
5. Des triangles dans tous les sens	3	4	5								Geo		BB
6. Les buts du mondial		4	5						Ar				Arg
7. Musiciens, comédiens et danseurs		4	5	6					Ar			Lo	LUX+gpp
8. Que d'oeufs! Que d'oeufs!			5	6	7				Ar				SI+gp
9. Le deuxième chapitre			5	6	7				Ar				11rmt+fj
10. Clous et élastiques			5	6	7						Geo		g.gplane
11. Pièces de monnaie				6	7	8			Ar	Alg			BB
12. Pyramide irrégulière				6	7	8					Geo		gpp
13. La boîte de vignettes				6	7	8			Ar				RV
14. La bibliothèque					7	8	9	10	Ar	Alg			PU
15. La cueillette des champignons						8	9	10	Ar	Alg			gp
16. Le retour de Mombo Tapie						8	9	10	Ar	Alg	Geo		fj
17. Aladin et le trésor d'Ali Baba						8	9	10				Lo	FC
18. Un polyèdre dans un cube							9	10			Géo		FC
19. L'aquarium							9	10	Ar	Alg			PR
20. Jeu équitable							9	10				Co	FC

1. DU PLUS PETIT AU PLUS GRAND (Cat. 3)

Cinq enfants comparent leurs tailles. Ils font les remarques suivantes :
- Michel est plus petit qu'Anne.
- Paul est plus grand que Camille.
- Louis est plus petit que Michel.
- Camille est plus grande qu'Anne.

Écrivez les prénoms des cinq enfants de gauche à droite, du plus petit au plus grand.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : relation d'ordre, déduction

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a deux relations opposées dans les données « plus grand » et « plus petit » et qu'il faut les exprimer avec une seule des deux ; par exemple Michel est plus petit qu'Anne, mais Anne est plus petite que Camille.
- Traiter les informations dans l'ordre où elles sont données : Michel - Anne, puis Camille - Paul, puis Louis - Michel, puis Anne - Camille et rassembler ces conditions : Louis - Michel - Anne - Camille – Paul ;

Ou, appliquer la « transitivité » de la relation d'ordre « est plus petit que » aux données ainsi classées et interprétées :

- Louis est plus petit que Michel et Michel est plus petit que Anne, on en déduit que Louis est plus petit que Anne;
- Anne est plus petite que Camille et Camille est plus petite que Paul donc Anne est plus petite que Paul.

On en conclut que Louis est le plus petit de tous parce qu'il est aussi plus petit que Camille et Paul.et ainsi on peut ordonner les enfants : Louis - Michel - Anne - Camille - Paul.

Niveau : 3

Origine : Franche-Comté

2. LES CHOCOLATS DE VICTOR (Cat 3, 4)

Victor a reçu quatre petites tablettes de chocolat noir, deux de chocolat blanc et une de chocolat praliné.
Il décide de manger une tablette chaque jour de la semaine prochaine, dès lundi ;
mais il ne veut pas manger une même sorte de chocolat deux jours de suite.

Dites quelle sorte de chocolat il pourra manger, chaque jour de la semaine.

Indiquez toutes les solutions que vous avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Procéder par essais et ajustements en contrôlant à chaque fois que la même sorte de chocolat n'apparaît pas deux jours de suite.

Ou : se rendre compte qu'il faut commencer par choisir les jours des quatre chocolats noirs et constater qu'il n'y a qu'une possibilité pour le faire ; les 1e, 3e, 5e et 7e jours.

puis procéder de façon systématique pour placer les trois autres chocolats sur les trois autres jours, (par exemple en choisissant le jour du praliné, on s'aperçoit que les deux autres jours sont pour les chocolats blancs).

- Déterminer ainsi les trois solutions et les noter jour par jour d'une manière claire. (En toutes lettres ou par des abréviations sans ambiguïtés, ou par une disposition en lignes et colonnes du genre :

lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
noir	blanc	noir	blanc	noir	praliné	noir
noir	blanc	noir	praliné	noir	blanc	noir
noir	praliné	noir	blanc	noir	blanc	noir

Niveau : 3, 4

Origine : Luxembourg

3. UNE PHOTO D'AFRIQUE (Cat 3, 4)

Clara observe une grande photo d'un paysage d'Afrique.
Elle compte les zèbres et les girafes.
Il y en a 36 en tout et le nombre de zèbres est le double du nombre de girafes.

Combien y a-t-il de girafes?

Combien y a-t-il de zèbres?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, double et moitié, proportionnalité (intuition)

Analyse de la tâche

- Comprendre les deux contraintes : les 36 animaux ; plus de zèbres que de girafes (le double).
- Procéder par essais de répartitions non systématiques ou par dessins, jusqu'à arriver à la solution (12, 24)

Ou, procéder par essais et ajustements systématiques à partir de l'une des deux contraintes :

- « 36 animaux » (1 et 35 ; 2 et 34 ;…) jusqu'à obtenir le double de zèbres ;
- « le double de zèbres » (1 et 2 ; 2 et 4 ; 3 et 6 ; …) jusqu'à obtenir une somme égale à 36 ;

Ou, commencer par répartir les 36 animaux en deux groupes égaux puis augmenter et diminuer simultanément chacun des nombres de façon à obtenir un nombre double de l'autre.

Ou, prendre en compte le rapport de 1 girafe pour 2 zèbres en imaginant des groupes de 3 animaux et conclure qu'il faudra 12 groupes, soit par la multiplication 3 x ? = 36, soit par la division 36 : 3 = ? soit par additions réitérées.

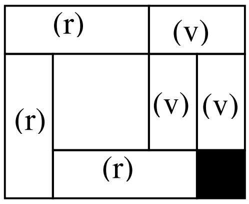
Ou, considérer directement que les animaux se répartissent en **une** partie de girafes et **deux** parties de zèbres pour voir ainsi les **trois** parties équivalentes - ou les trois tiers - et diviser immédiatement 36 par 3 pour trouver le nombre de girafes (stratégie peu probable en catégorie 3).

Niveau : 3, 4

Origine : Udine

4. LES CARRES DE PAUL (Cat. 3, 4, 5)

Paul a reçu un jeu de construction, composé de huit pièces rangées dans une boîte, comme celle dessinée ici :

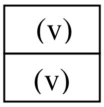


Il y a quatre sortes de pièces, de quatre couleurs:
- un grand carré blanc,
- trois petits rectangles verts, (v)
- trois grands rectangles rouges, (r)
- un petit carré noir.

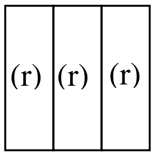
<u>Colorier toutes les pièces rouges</u> <u>(r)</u> *<u>et vertes</u>* <u>(v)</u>

Le jeu consiste à former des carrés avec plusieurs pièces données.
Paul a pu former deux carrés de plusieurs pièces d'une seule couleur :

un vert

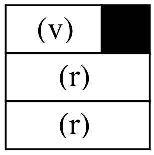


et un rouge



Il a aussi pu former beaucoup de carrés de trois couleurs (avec trois sortes de pièces).

Par exemple : avec le carré noir,
un rectangle vert (v)
et deux rectangles rouges (r) :



Essayez de former un carré de deux couleurs (en utilisant deux sortes de pièces seulement).

Essayez de former un autre carré, de quatre couleurs, (en utilisant les quatre sortes de pièces).

Dessinez les carrés que vous avez pu former (seulement un de deux couleurs et seulement un de quatre couleurs) en faisant bien apparaître les pièces que vous avez utilisées.

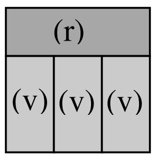
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : carrés, rectangles, aires

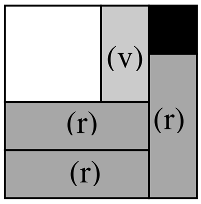
Analyse de la tâche

- Percevoir, d'après les figures données, les rapports entre les dimensions des quatre sortes de pièces : (1 x 1), (1 x 2), (1 x 3) et (2 x 2) afin de pouvoir les juxtaposer.
- Comprendre que pour construire les carrés on ne peut utiliser que les huit pièces à disposition pour chaque construction, mais qu'il n'est pas nécessaire de les utiliser toutes.
- Vérifier les deux exemples de carrés d'une seule couleur (qui utilisent pourtant plusieurs pièces).
- Chercher à construire un carré de deux couleurs (avec deux sortes de pièces) et voir qu'il n'y a qu'une possibilité pour un carré de 3 x 3, avec les trois petits rectangles et un grand rectangle (voir ci-dessous). (On ne peut utiliser ni le petit carré noir, ni le grand blanc car il faudrait encore deux autres sortes de pièces pour terminer la construction. Pour un carré plus grand, de 4 x 4, il faudrait aussi plus de deux sortes de pièces.)



- Constater que, pour le carré avec quatre sortes de pièces, il n'existe pas de carré de 3 x 3, par essais ou par des considérations sur les aires. (Les quatre sortes de pièces donnent au minimum une aire de 1 + 4 + 2 + 3 = 10, qui est supérieur à 3 x 3 = 9). En cherchant à construire des carrés de 4 x 4, avec les quatre sortes de pièces, on s'aperçoit qu’il n’y a aussi qu’une solution, par essais (ou éventuellement, pour les plus grands élèves, par des considérations sur les aires : une pièce de chaque sorte donne déjà une aire de 10, pour aller à 16 il faut obligatoirement ajouter deux pièces d’aire 3, c’est-à-dire deux grands rectangles.)

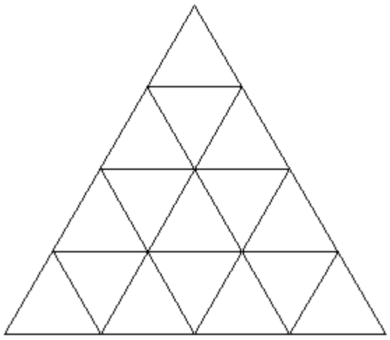
- Former alors un carré de 4 x 4 avec le petit noir, le grand blanc, un petit rectangle vert et les trois grands rectangles rouges.



Origine : Udine

5. DES TRIANGLES DANS TOUS LES SENS (Cat. 3, 4, 5)

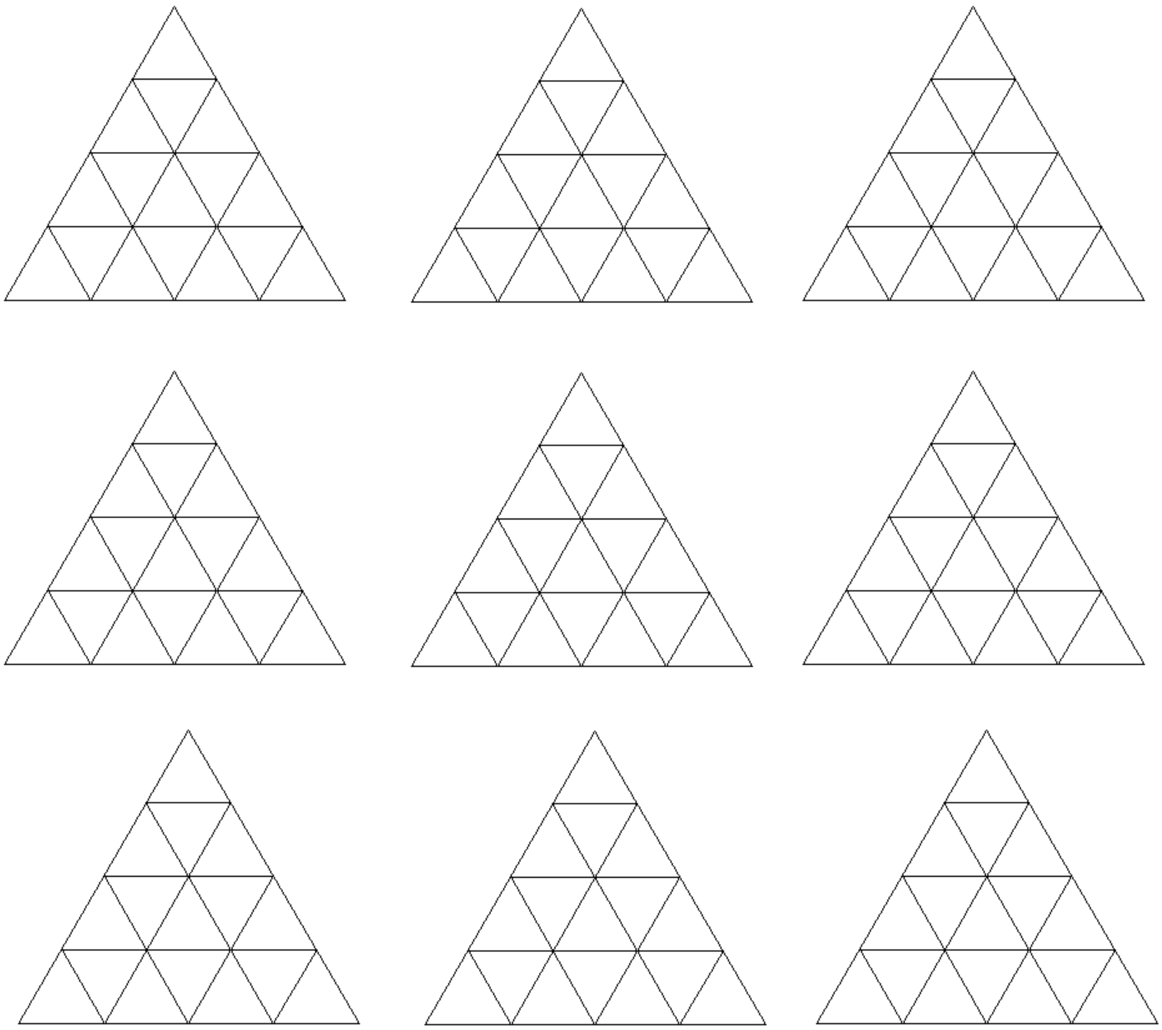
Il y a beaucoup de triangles dans cette figure, des petits, des plus grands .... Certains sont faciles à voir et d'autre moins.



Combien peut-on voir de triangles en tout dans cette figure ?

Dites combien il y en a de chaque taille.

Pour vous aider, vous pouvez utiliser les grilles ci-dessous et dessiner vos triangles de couleurs différentes.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : reconnaissance de triangles dans une figure complexe
- Logique : dénombrement organisé

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a des triangles de tailles différentes et que certains peuvent en contenir d'autres plus petits.
- Identifier les quatre types de triangles.
- Compter tout d'abord les plus petits (16)
- S'organiser pour ne pas oublier de triangles parmi les autres types (qui se superposent partiellement) soit en les dessinant de couleurs différentes, soit en marquant leurs sommets ... et trouver :
  - les 7 qui contiennent 4 petits triangles, si l'on n'oublie pas celui du centre qui « a la tête en bas »,
  - les 3 qui contiennent 9 petits triangles,
  - et celui qui contient les 16 petits. Au total ; 16 + 7 + 3 + 1 = 27

Ou, découper un triangle fait de 4 petits triangles, un autre de 9 petits triangles les placer sur le grand triangle pour trouver toutes les positions qu'ils peuvent occuper.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Bourg-en-Bresse

6. LES BUTS DU MONDIAL (Cat. 4, 5)

André a collé dans un album les 145 photos des buts marqués pendant la coupe du monde de football 2010.
Les pages de l'album sont numérotées de 1 à 40.
Il a collé 6 photos sur la page 20 et 6 autres photos sur la page 21.
Ensuite, sur chaque page impaire (sauf la page 21), il a collé le même nombre de photos.
Enfin, sur chaque page paire (sauf la page 20), il a collé une photo de plus que sur chaque page impaire.

Combien de photos André a-t-il collées sur la page 4 ? Et combien sur la page 33 ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : les 4 opérations, nombres pairs et impairs

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il reste 38 pages à remplir avec 133 photos.
- Comprendre aussi qu'il y a alors 19 pages paires et 19 pages impaires à remplir.
- Comprendre que chaque page paire contient une photo de plus que chaque page impaire.
- Procéder par essais et ajustements successifs, (par exemple en multipliant deux nombres qui se suivent par 19 et en les additionnant pour obtenir 133).

Ou partir de divisions et d'ajustements :

diviser 133 par 38, puis ajuster à partir du quotient (ou essayer en partant de 38 x … de s'approcher de 133) ;

diviser 133 par 19, on trouve 7 à partager entre une page paire (4 photos) et une page impaire (3 photos) ;

diviser approximativement 133 par 2 (prendre par exemple 66) et diviser le résultat par 19, puis ajuster.

Ou, soustraire 19 de 133 (une photo par page paire, diviser par 2 ; 114 : 2 = 57, distribuer les 57 photos en parts égales sur les 19 pages 57 : 19 = 3 et conclure qu'il y a 3 photos par page impaire et 4 par page paire.

- Répondre à la question : 4 photos sur la page 4 et 3 photos sur la page 33.

Niveau : 4, 5

Origine: Argentine

7. MUSICIENS, COMEDIENS ET DANSEURS (Cat. 4, 5, 6)

Les 20 élèves de la classe ont formé trois groupes pour un spectacle :
un groupe de musiciens;
un groupe de comédiens ;
un groupe de danseurs.
Les musiciens sont les plus nombreux.
Les comédiens sont moins nombreux que les danseurs.
La différence entre le nombre de musiciens et le nombre de comédiens est plus petite que 7.

Comment les 20 élèves ont-ils pu se répartir dans les trois groupes ?

Donnez toutes les possibilités et indiquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : dénombrement, addition, soustraction

Analyse de la tâche

- A la lecture du texte, comprendre que les nombres d'élèves dans les trois groupes sont ordonnés ainsi : nb. musiciens > nb. danseurs > nb. comédiens, que les trois nombres sont différents, que leur somme est 20, et qu'il y a 6 de différence, au maximum, entre le petit nombre et le grand nombre.
- Comprendre que, pour répondre à la question, il faudra rechercher « toutes les manières de répartir les élèves » c'est-à-dire dresser l'inventaire complet des décompositions de 20 selon les contraintes citées ci-dessus.
- Pour cela, on peut procéder par essais et ajustements, avec le risque de ne pas être exhaustif.
- On peut aussi organiser les décompositions de façon à ne pas en oublier. Les modes d'organisation sont nombreux. En faisant des essais sur le nombre de comédiens auquel on ajoute de 1 à 6 pour obtenir le nombre de musiciens :

  on peut éliminer l'hypothèse « 1 » comédien car on aurait de 2 à 7 musiciens et donc de 17 à 12 danseurs, ce qui contredit une des contraintes. 20 – (1 + 2) = 17, 20 – (1 + 3) = 16, … 10 – (1 + 7) = 12,

  de même, avec 2 comédiens, au aurait de 3 à 8 musiciens et donc de 15 à 10 danseurs,

  avec 3 comédiens, les essais de 4, 5, 6, 7, 8 musiciens donnent 13, 12, 11, 10, 9 danseurs mais l'essai de 9 musiciens (le maximum) donne 20 – (3 + 9) = 8 danseurs : première solution : **3 comédiens, 8 danseurs et 9 musiciens** ;

  avec 4 comédiens, on obtient les solutions (**4 ; 6 ; 10**) et (**4 ; 7 ; 9**) car (4 ; 8 ; 8), (4 ; 9 ; 7) … sont à éliminer,

  avec 5 comédiens, on obtient les solutions (**5 ; 6 ; 9**) et (**5 ; 7 ; 8**) car (5 ; 11 ; 4), (5 ; 10 ; 5) … sont à éliminer,

  avec 6 comédiens, il n'y a plus de solutions car (6 ; 12 ; 2), (6 ; 11 ; 3) … (6 ; 7 ; 7) sont à éliminer.

Ou : faire l'inventaire de toutes les décompositions de 20 en somme de trois termes différents ordonnés du plus petit au plus grand (1 + 2 + 17 ; 1 + 3 + 16 ; … ; **3 + 8 + 9** ; 4 + 5 + 11 ; **4 + 6 + 10 ; 4 + 7 + 9 ; 5 + 6 + 9 et 5 + 7 + 8** et choisir celles où il n'y a pas plus de 6 de différence entre le petit et le grand terme.

- Exprimer la réponse dans le contexte donné : il y a 5 répartitions possibles (comédiens, danseurs, musiciens) : (3 ; 8 ; 9), (4 ; 6 ; 10), (4 ; 7 ; 9) (5 ; 6 ; 9) et (5 ; 7 ; 8).

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Luxembourg + gp

8. QUE D'ŒUFS ! QUE D'ŒUFS ! (Cat. 5, 6, 7)

Mathurin emballe ses œufs de la façon suivante.

- Il les met d'abord dans des boîtes de 6 œufs ;
- chaque fois qu'il a 6 boîtes, il les met dans un carton, qu'il ferme ;
- dès qu'il a 6 cartons, il les met dans une caisse, qu'il ferme.

Aujourd'hui, les poules ont bien pondu… Mathurin a ramassé 1 000 œufs.
Mathurin vient de terminer les emballages.

Combien voit-il de caisses pleines, de cartons pleins, de boîtes pleines et d'œufs non emballés ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : division, quotients et restes, multiplication, puissances

Analyse de la tâche

- Comprendre les emboîtements successifs obtenus en groupant les œufs par boîte de 6, puis les boîtes par cartons de 6 et enfin les cartons par caisse de 6.
- Comprendre qu'il y a des emballages qui ont été réalisés et qu'on ne voit plus à la fin.
- Utiliser une procédure progressive : 6 œufs donnent une boîte, 6 boîtes donnent un carton (soit 36 œufs utilisés), 6 cartons donnent 1 caisse (donc on a utilisé 216 œufs). Il reste 784 œufs … pour lesquels on reprend le processus.

Ou, utiliser une procédure par divisions successives par 6 en interprétant le quotient comme le nombre d'emballages « supérieurs » et le reste comme le nombre d'œufs ou d'emballages « inférieurs ».

Ou, calculer qu'une caisse contient 6 x 6 x 6 = 216 œufs et un carton 6 x 6 = 36 œufs, puis diviser 1000 par 216, on trouve 4 (donc 4 caisses) avec un reste de 136 (œufs), puis diviser 136 par 36, on trouve 3 (cartons) avec un reste de 28 œufs qui remplissent 4 boîtes de 6 et il reste 4 œufs non emballés.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena, 4e RMT I. *Les emballages*

9. LE DEUXIEME CHAPITRE (Cat. 5, 6, 7)

Jean vient de lire le deuxième chapitre d'un livre d'aventure.
Les pages du livre sont numérotées de 1 à 216 et chaque nouveau chapitre commence sur une nouvelle page.
Jean a additionné les numéros des pages du deuxième chapitre et a trouvé 98. comme somme.

Combien le deuxième chapitre peut-il avoir de pages ? et quelles sont ces pages ?

Indiquez toutes les possibilités et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les opérations et leurs propriétés, la numération

Analyse de la tâche

- Comprendre que les numéros des pages du deuxième chapitre sont des nombres qui se suivent, que leur somme est 98, qu'ils ne doivent pas commencer par 1 (il y a un premier chapitre).
- Faire quelques essais à partir d'une hypothèse sur la première page du deuxième chapitre et vérifier si l'on arrive à 98 en additionnant les numéros des pages successives. Par exemple si l'on pense que la première page est 17, additionner successivement 18 (35), 19 (54), 20 (74), 21 (95), 22 (117) ceci permet de constater qu'on a dépassé 98 sans y passer.
- Dresser un inventaire systématique par hypothèses successives à partir de 3, 4, 5, … comme première page du deuxième chapitre. (Avec l'hypothèse « 3 », on additionne 3 + 4 + 5 + … et l'on vérifie que l'on n'atteint pas 98) Cette méthode est longue et un peu fastidieuse mais avec la calculatrice et une répartition des essais au sein du groupe, elle peut aboutir.

Ou organiser les essais à partir de 98 pages et d'une estimation par divisions successives du nombre situé au milieu de la suite. Par exemple si l'on considère un chapitre de deux pages, on voit que 49 est la moitié de 98 mais que ni 49 + 50 ni 48 + 49 ne peuvent conduire à 98.

Avec trois pages, on imagine un nombre au centre de la suite et proche du tiers de 98 : 32 + 33 + 34 = 99 ou 31 + 32 + 33 = 96 montrent qu'on n'arrive pas à 98.

C'est avec 4 pages qu'on arrive à la première solution : le quart de 98 se situe entre 24 et 25, ces deux nombres pourraient être au centre de la suite de 4 nombres consécutifs ; et effectivement 23 + **24** + **25** + 26 = 98

On élimine ensuite les hypothèses sur 5 et sur 6 pages pour constater qu'avec 7 pages on arrive à une deuxième solution 98 : 7 = 14 donne : (11 + 12 + 13 + **14** + 15 + 16 + 17 = 98)

Puis il faudra éliminer les hypothèses allant de 8 à 11 pages. A partir de 12 il n'y a plus de solution, car la somme de 12 nombres consécutifs commençant par 3 dépasse déjà 98 (3 + 4 + ... + 14 = 102).

Ou, utiliser (plus ou moins consciemment) des propriétés des opérations, par exemple :

- comme 98 est pair, il ne peut pas être la somme de deux nombres consécutifs (dont l'un est pair et l'autre impair) mais il peut être la somme de quatre nombres consécutifs comme le sont les nombres pairs non multiples de 4

6 (0 + 1 + 2 + 3) ; 10 (1 + 2 + 3 + 4) ; 14 (2 + 3 + 4 + 5) ; 18 ; 22, …

- comme 98 n'est pas un multiple de 3 il ne peut pas être la somme de trois nombres consécutifs (le triple du nombre du milieu, le petit valant un de moins et le grand un de plus) ;

- 98 est un multiple de 7, c'est la somme d'une suite de 7 nombres consécutifs dont 14 = 97 : 7 est la « moyenne ».

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : 11 RMT F, Le Ruban de Marie et le Ruban de Noé

10. CLOUS ET FILS ELASTIQUES (Cat. 5, 6, 7)

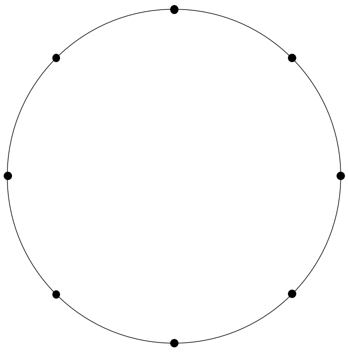


figure 1

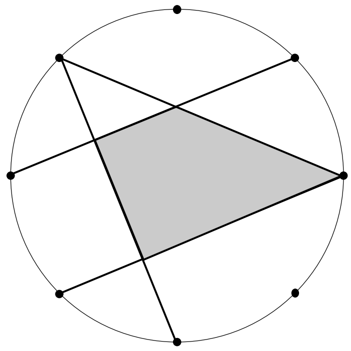


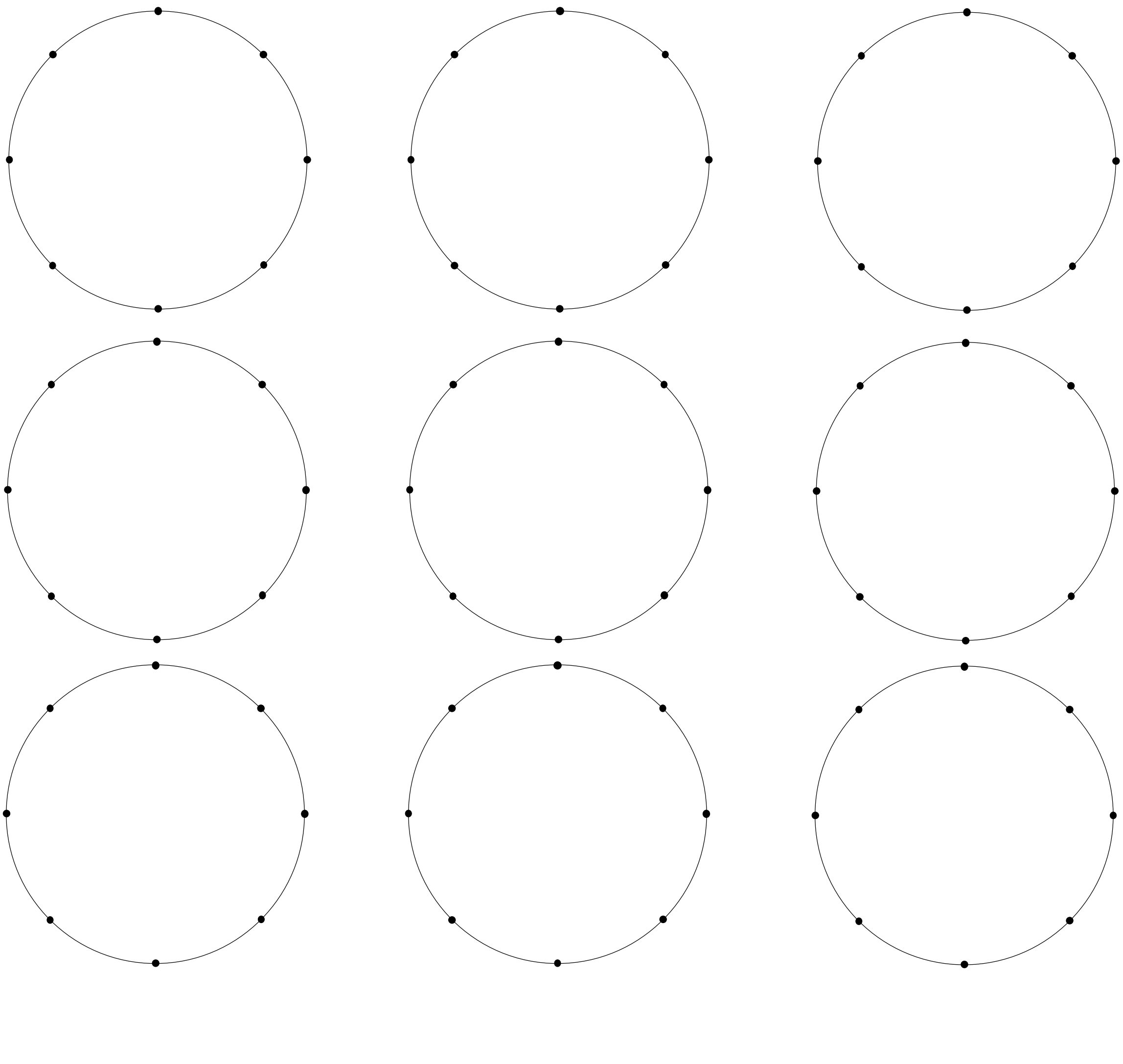
figure 2

Sur le bord d'un disque on a planté 8 clous très régulièrement. Entre deux clous qui se suivent, il y a toujours la même distance (voir figure 1).
On dispose de quatre fils élastiques qu'on peut tendre entre deux clous.
Le but est de former des rectangles (ou des carrés) ayant leurs côtés sur les quatre fils.
Jules a tendu les quatre fils (voir figure 2), mais il n'a pas atteint son but : il a obtenu un trapèze !

Trouvez tous les rectangles ou carrés différents que les quatre fils peuvent former.

Dessinez toutes les figures que vous avez trouvées. Si vous avez deux figures de mêmes dimensions, n'en dessinez qu'une seule !

(Utilisez les cercles ci-dessous pour dessiner vos rectangles ou carrés différents.)



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : reconnaissance de rectangles en tenant compte de leurs propriétés

Analyse de la tâche

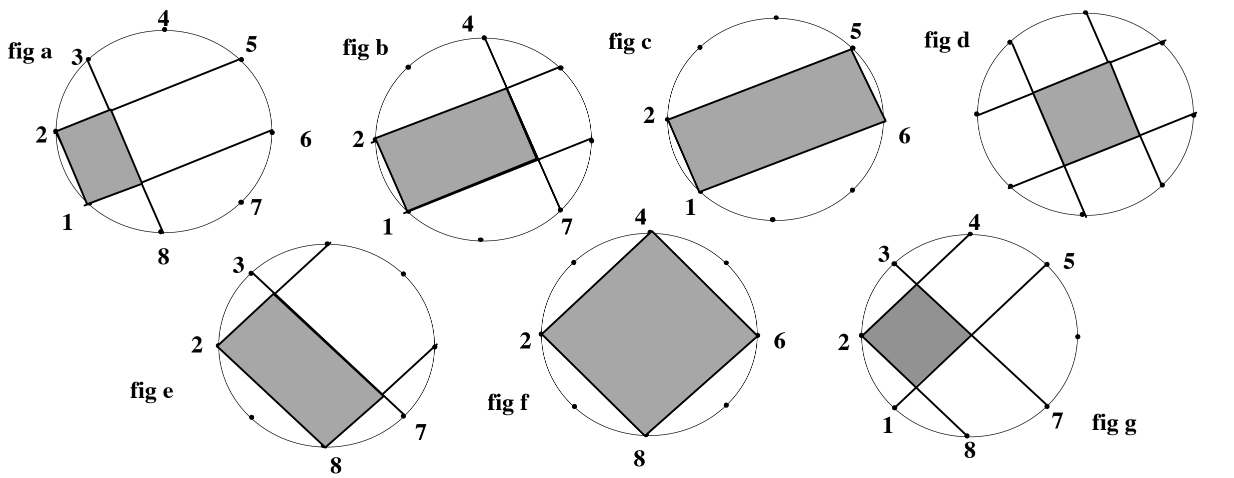
- Percevoir les positions des clous sur le cercle et imaginer les isométries qui déterminent les positions relatives des clous et des fils qui les relient. Par exemple un fil tendu entre deux clous voisins se retrouve sur un fil tendu sur les deux clous opposés après une rotation d'un demi-tour, ce qui permet de savoir que ces fils sont parallèles, des rotations d'un quart de tour font apparaître des diamètres perpendiculaires, …
- Comprendre que pour construire les rectangles possibles, il est nécessaire de faire intervenir le parallélisme et l'isométrie des côtés opposés et la perpendicularité des côtés adjacents.
- Procéder par essais non organisés, avec le risque de ne pas trouver toutes les solutions.

Ou chercher une méthode systématique. Par exemple, un inventaire des clous supportant des fils parallèles :

• pour deux clous voisins de la figure **a** (**1** et **2**), il y a trois autres paires de clous qui déterminent la même direction (**3** et **8**), (**4** et **7**), (**5** et **6**), ce qui permet de déterminer les quatre rectangles des figures **a**, **b**, **c** et **d**, dont la longueur d'un côté est la distance de **1** à **2.**

• pour deux clous séparés par un autre, (**8** et **2**) de la figure **e**, il y a deux autres paires de clous qui déterminent la même direction (**3** et **7**), (**4** et **6**), ce qui permet de déterminer les deux rectangles des figures **e** et **f**, dont la longueur d'un côté est la distance de **2** à **8**. Avec une paire de côtés de cette direction, la combinaison avec les paires de perpendiculaires fait apparaître encore un autre rectangle (carré de la figure **g**) dont le côté vaut la moitié de la distance de **2** à **8**.

- Contrôler que les rectangles ainsi formés n'ont pas les mêmes dimensions. En particulier les carrés des figures **d** et **g** (car la distance de **1** à **2** est supérieure à la moitié de la distance de **8** à **2**.)
- Dessiner les sept solutions (dont trois sont des carrés).



Niveaux : 5, 6, 7

Origine : groupe géométrie plane

11. PIECES DE MONNAIE (Cat. 6, 7, 8)

Bernard a entre 8 et 10 euros dans son porte-monnaie. Cette somme est composée seulement de pièces de 20 centimes et de pièces de 1 euro.

Il calcule que, s'il remplaçait chaque pièce de 20 centimes par une pièce de 1 euro et chaque pièce de 1 euro par une pièce de 20 centimes, la somme qu'il aurait alors ne vaudrait plus que la moitié de ce qu'il a maintenant.

Quelle somme Bernard a-t-il dans son porte-monnaie ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, équivalence
- Algèbre (équation)

Analyse de la tâche

- Comprendre l'énoncé et les quatre données essentielles : la somme initiale est supérieure à 8 euros et inférieure à 10 euros, composée de pièces de 1 euro et de pièces de 20 centimes ; la somme finale est égale à la moitié de la somme initiale, composée de manière inversée entre pièces de 1 € et pièces de 20 centimes.
- Procéder par essais (systématiques ou non) de nombre de pièces de 1 € et de 20 centimes donnant une somme comprise entre 8 et 10 €, inverser la composition des pièces et vérifier si la somme obtenue représente bien la moitié de la somme initiale

Ou, procéder par essais de nombre de pièces de 1 € et de 20 centimes donnant une somme entre 4 et 5 euros ; inverser la composition des pièces et vérifier si la somme obtenue représente bien le double de la somme finale.

Ou, procéder par essais à partir de la somme initiale en se limitant à considérer les cas ou une telle somme et sa moitié peuvent s'exprimer avec des pièces de 1 euro ou 20 centimes (en excluant des sommes comme 9,90, ou 9,80). Il reste quatre possibilités: 8,40 ; 8,80 ; 9,20 et 9,60. Se rendre compte que seules 9,60 et sa moitié, 4,80, peuvent être obtenues en intervertissant les nombres de pièces (9 de 1 € et 3 de 20 centimes deviennent 3 de 1 € et 9 de 20 centimes).

(Si l'on se rend compte que la somme obtenue après inversion des pièces est inférieure à 5 € on en déduit qu'elle est formée au plus 5 pièces de 1 € et la somme initiale contient donc au plus 5 pièces de 20 c (soit 1 €). Elle contient donc au moins 7 pièces de 1 €. Il y a alors peu d'essais à faire dans les procédures ci-dessus.)

Ou : mettre le problème en équation : si x et y désignent respectivement les nombres (entiers) de pièces de 1 € et de 20 centimes, on aboutit à : $8 < x + 0{,}2\,y < 10$ et $x + 0{,}2y = 2(y + 0{,}2x)$, ce qui conduit à $x = 3y$.

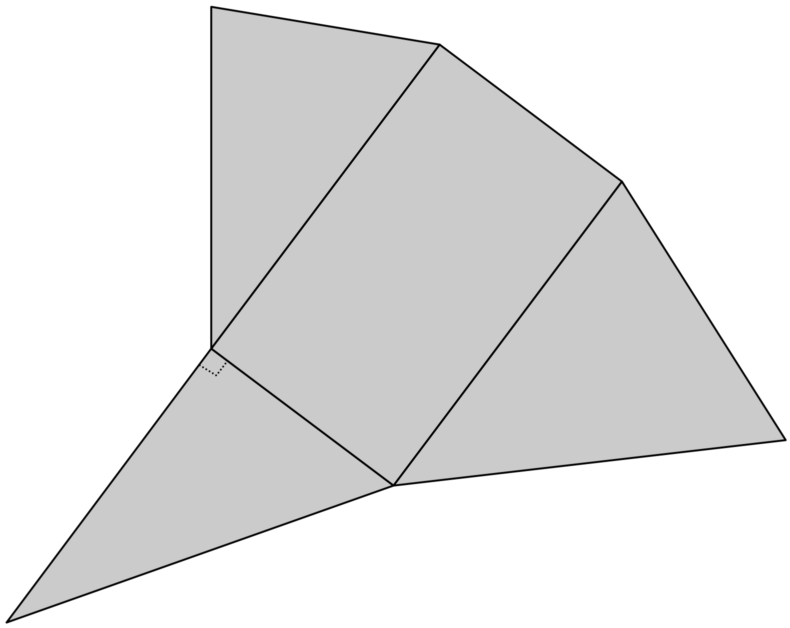
puis, par essais systématiques constater que parmi les quatre couples (3 , 1) ; (6 , 2) ; (9 , 3) ; (12 , 4), seul le troisième est à envisager car il conduit à une somme de 9,60 €.

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Bourg-en-Bresse (d'après un problème proposé dans « La mathématique vivante », Perelman, CEDIC, 1975)

12. PYRAMIDE IRREGULIERE (Cat. 6, 7, 8)

Jules veut construire une pyramide, en carton, dont la base est un rectangle.
Il a déjà dessiné la base et trois faces latérales, dont l'une est un triangle rectangle.
Il a vérifié qu'en pliant ces trois faces, leurs sommets opposés à la base se rencontrent précisément au sommet de la pyramide.



Dessinez la quatrième face qui doit permettre de fermer la pyramide.

Expliquez comment vous l'avez construite.

Après avoir construit sa pyramide, Jules la pose avec sa base rectangulaire sur le sol puis il se place juste au-dessus, le plus haut possible.

Dessinez la pyramide comme la voit Jules, vue de dessus, et dites combien de faces sont visibles de ce point de vue.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : géométrie dans l'espace et construction d'un patron, équivalence de longueurs de côtés

Analyse de la tâche

- Imaginer mentalement la construction de la pyramide par pliage selon les arêtes : les trois faces triangulaires qui se relèvent et concourent sur le sommet de la pyramide, laissant encore un trou. Ou découper effectivement le patron non terminé et plier les trois faces données pour se rendre compte des caractéristiques du « trou » triangulaire.
- Comprendre alors que certains côtés de triangles sont de même longueur puisqu'ils deviennent communs lorsque la pyramide est construite.
- En déduire que le quatrième triangle a un côté sur la largeur du rectangle, un côté égal à son voisin du triangle supérieur et l'autre égal à son voisin du triangle de droite. (*a* et *b* sur la figure 1)
- Construire ce dernier triangle par report des côtés au compas ou par mesurage et constater qu'il est rectangle, avec un angle doit sur la base (comme le triangle de gauche).
- Imaginer ou effectuer les mouvements des sommets des triangles lorsqu'on passe du patron à la réalisation de l'objet en trois dimensions, lorsque la base reste dans un plan horizontal (souvent le plan de la feuille posée sur la table) : les sommets des triangles rectangles de gauche et de droite restent dans le plan vertical contenant une arête de la

base ; ils se retrouveront donc au-dessus de cette arête, la position sur l'arête pouvant être déterminée par le plan dans lequel se déplacent les deux sommets des autres faces. Comprendre alors qu'on ne voit que trois faces de la pyramide lorsqu'on la regarde du haut.

- Expliquer comment a été construit le quatrième triangle et dessinez la pyramide vue de dessus, soit par estimation visuelle ou par construction géométrique (Voir figure 2)

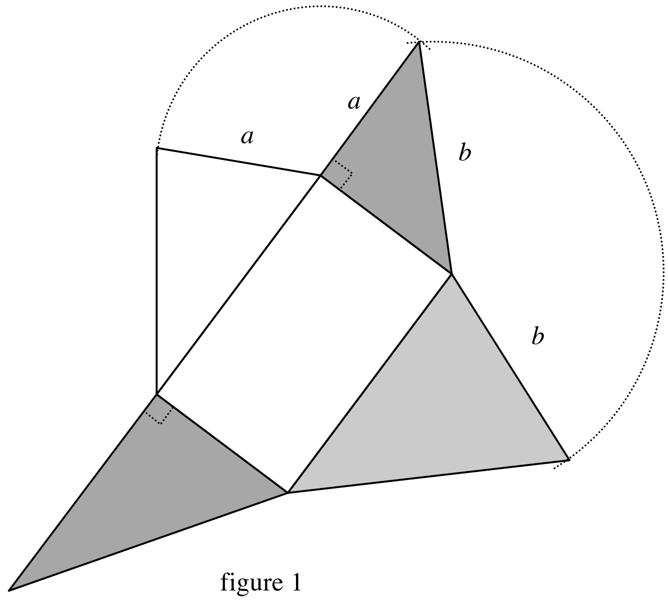


figure 1

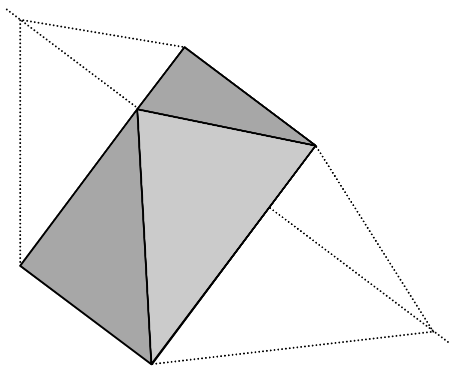


figure 2

Degrés : 6, 7, 8

Origine: gpp

13. LA BOITE DE VIGNETTES (Cat. 6, 7, 8)

Matthieu conserve dans une boîte de nombreuses images de footballeurs dans une boîte. On sait que :

- Leur nombre se situe entre 1300 et 1500.
- Si on regroupe les vignettes par 2, il en reste une.
- Si on regroupe les vignettes par 3, il n'en reste pas.
- Si on fait des groupes de 5, on constate qu'il manque 2 vignettes pour que tous les groupes soient complets.
- Si on regroupe les vignettes par 7, il en reste 4.

Quel est le nombre de vignettes contenues dans la boîte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALISI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : divisibilité, numération, multiples communs

Analyse de la tâche

- Comprendre que, comme il s'agit d'un nombre élevé d'objets, il est improductif de travailler par manipulation ou dessins, et qu'il est préférable de recourir à des écritures de nombres et de relations numériques.
- Trouver une méthode d'élimination ou de choix qui évite d'effectuer trop de divisions et de calculs de restes. Par exemple :

  Retenir les nombres qui se terminent par 3 et 8 (parce que leur reste est 3 dans une division par 5) ; éliminer les nombres pairs (le reste est 1 dans une division des nombres cherchés par 2) et conclure que les nombres cherchés se termineront par 3. Ne retenir que les multiples de 3 (troisième condition) et se limiter à examiner seulement 1323, 1353, 1383, 1413, 1443 et 1473. Parmi ceux-ci, vérifier ceux dont le reste est 4 dans une division par 7 et trouver que seul 1383 satisfait cette condition. (1383 = 197 x 7 + 4)

Ou : écrire les multiples de 7 augmentés de 4 de 1300 à 1500, (1306, 1313, 1320, …), éliminer les nombres pairs et ne retenir que ceux qui se terminent par 3 (1313, 1383, 1453) pour ne conserver que 1383 qui est multiple de 3.

Origine: Riva del Garda

14. LA BIBLIOTHEQUE (Cat. 7, 8, 9)

Luc et Jeanne ont décidé de réunir leurs livres et de les ranger sur les rayons d'une bibliothèque.

- Ils ont 372 livres en tout.
- Sur chaque rayon, le nombre de livres de Jeanne est le double du nombre de livres de Luc.
- A partir du deuxième rayon depuis le haut, le nombre de livres sur un rayon est le double du nombre de livres qu'il y a sur le rayon situé juste au-dessus.

Combien y a-t-il de rayons dans cette bibliothèque ?

Combien de livres Luc a-t-il mis sur chaque rayon ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : divisions et multiplications (suite de nombres en progression géométrique de raison 2)
- Algèbre : expressions littérales

Analyse de la tâche

- Comprendre que la relation entre les livres rangés par Jeanne et par Luc sur chaque rayon est aussi valable pour l'ensemble de la bibliothèque. Donc le nombre des livres rangés par Luc est le tiers des livres, c'est-à-dire 124.
- Comprendre que s'il a mis n livres sur le premier rayon, il en a mis $2n$ sur le deuxième, $4n$ sur le troisième…
- Procéder par essais à partir de 1, 2, 3 , … nombres de livres de Luc sur le premier rayon, pour obtenir exactement un total de 124. On l'obtient 5 rayons en partant de 4 sur le premier rayon ($4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$). Le nombre d'essais peut être réduit si l'on se rend compte qu'il y faut un nombre pair de livres de Luc sur le premier rayon pour arriver à un total de 124. (Il faut rejeter l'essai à partir de 124 livres sur le premier rayon car, selon l'énoncé, il y a plusieurs rayons).

Ou, procéder par essais à partir du nombre de rayons : 2, 3, 4, … en désignant par n le nombre de livres de Luc sur le premier rayon, ce qui amène à $n + 2n + 4n + 8n +15n = 31n = 124$ et à $124 : 31 = 4$, et à la solution : 4 pour Luc et 8 pour Jeanne.

Ou : toujours en désignant par n le nombre de livres de Luc sur le premier rayon, on trouvera $3n$ livres sur le premier, $6n$, $12n$, $24n$ ... sur les suivants, pour une somme de $3n(1 + 2 + 4 + ...) = 372$, ou $n(1 + 2 + 4 + ...) = 124$. Remarquer que 124 n'a que 2, 4 et 31 comme diviseurs et que la somme $1 + 2 + 4 + ...$ est impaire, donc égale à 31. $n = 4$ et comme $31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$, il y a 5 rayons à la bibliothèque. Luc a donc disposé ses livres ainsi :
$4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$ livres (le tiers de 372).

(Dans toutes les procédures décrites ci-dessus la variable peut être aussi bien le nombre de livres de Luc que le nombre total de livres sur le premier rayon.)

Niveaux : 7, 8 , 9

Origine : Puglia

15. LA CUEILLETTE DE CHAMPIGNONS (Cat. 8, 9, 10)

C'est la saison des champignons. Antonio, Patricia, Michel et Fabienne vont dans les bois à leur recherche. À la fin de la journée ils en ont ramassé 57. Les quatre amis comparent le contenu de leurs paniers et se rendent compte que :

- si Antonio avait ramassé un champignon de plus,
- si Patricia en avait ramassé 4 de moins,
- si Michel en avait ramassé le double,
- si Fabienne en avait ramassé la moitié,

chacun d'eux aurait alors le même nombre de champignons dans son panier.

Combien de champignons chaque ami a-t-il ramassés ?

Expliquez votre raisonnement

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations (et les opérations « inverses »)
- Algèbre : équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut faire un raisonnement par hypothèses.
- Procéder par essais organisés (considérant par exemple que le nombre de champignons de Fabienne doit être pair et multiple de 4 et vérifier chaque fois que toutes les conditions sont respectées

Ou: partir de 14 (proche de 57 : 4) comme nombre de champignons cueillis par chacun et vérifier qu'on obtiendrait ainsi plus de champignons que 57 ((14 - 1) + (14 + 4) + 7 + 28 = 66); procéder ensuite par ajustements successifs à partir de nombres pairs (le double de ceux ramassés par Michel) et trouver qu'avec12 toutes les conditions sont respectées. ((12 - 1) + (12 + 4) + 12 :2 + 12 x 2 = 57).

Ou : procéder par voie algébrique. Il y a alors plusieurs choix possibles de l'inconnue mais on aboutit à des équations du premier degré de même difficulté. Par exemple si x est le nombre de champignons que chacun aurait trouvé on a alors $(x - 1) + (x + 4) + 2x + (1/2)\,x = 57$. On peut aussi désigner par x le nombre de champignons ramassés par l'un des amis pour arriver à une équation du genre : $(2x - 1) + (2x + 4) + x + 4x = 57$ où x est le nombre de champignons ramassés par Michel, etc.

(On peut aussi arriver à ces équations à partir des égalités: $a + 1 = p - 4 = 2m = f/2$, où a, p, m, f sont les nombres de champignons ramassés par Antonio, Patricia, Michel et Fabienne.)

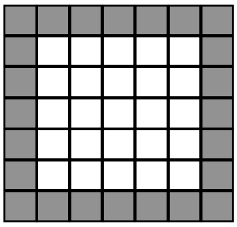
- Trouver dans chaque cas que Antonio a ramassé 11 champignons, Patricia 16, Michel 6 et Fabienne 24.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : 10 RMT I et gp

16. LE RETOUR DE MOMBO TAPIE (Cat 8, 9, 10)

Mombo Tapie commercialise un nouveau modèle de tapis carrés, constitués de petits carrés de même grandeur : des gris sur le bord et des blancs à l'intérieur.
Voici une représentation d'un tapis de ce modèle, de sept carrés par coté :



Le plus petit tapis a trois carrés par coté.
Tous les tapis de ce modèle sont disponibles jusqu'à vingt carrés par côté.
Monsieur Ronay souhaite acheter un modèle avec exactement autant de carrés gris que de carrés blancs.
Madame Gratin souhaite acheter un tapis un peu plus clair, avec plus de deux tiers de carrés blancs, mais cependant moins de trois quarts de carrés blancs.

Est-il possible de satisfaire Madame Gratin ? Et Monsieur Ronay ?

Dans l'affirmative, indiquez le ou les modèles de tapis qui pourraient satisfaire chacun des deux clients.

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : carré, aire et périmètre
- Arithmétique : opérations, carrés, rapports
- Fonctions : suites et examen des variations d'une fonction de variable discrète
- Algèbre. calcul littéral d'expressions du second degré ; équations et inéquations du deuxième degré

Analyse de la tâche

- Imaginer les tapis du type de la sorte donné et en dessiner quelques-uns, parmi les plus simples.
- Comprendre les relations arithmétiques entre les nombres de carrés gris, le nombre de carrés blancs et le nombre de carrés sur un côté du tapis. Par exemple (en langage ordinaire) : le nombre de carrés gris est quatre fois le nombre de carrés sur le côté du tapis, moins les quatre carrés des angles qui seraient comptés deux fois ; et le nombre de carrés blancs est le nombre de carrés sur le côté du tapis, moins deux, puis élevé au carré.
- Noter les nombres de carrés de chaque couleur pour quelques tapis, puis se rendre compte qu'il faut en dresser un inventaire systématique (voir exemples suivant :)
- Prendre en compte les demandes des clients et, par conséquent, calculer le rapport « carrés blanc / nombre total » pour voir les modèles qui conviennent.

  Une analyse des rapports passe par la prise de conscience de leur croissance en fonction du nombre de carrés sur le côté : les tapis deviennent « de plus en plus clairs » car la partie blanche du centre croît plus rapidement que la bordure grise. On peut ainsi aboutir à un inventaire de ce genre, qui se limite aux modèles à envisager :

carrés par côté	carrés gris	carrés blancs	carrés du tapis	blancs/ total
3	8 (= 3 x 4 – 4)	$1 = (3-2)^2$	$9 = 3^2$	1/9 = 0,11…
...	...	...	...	...
6	20 (= 6 x 4) – 4)	$16 = (6-2)^2$	$36 = 6^2$	16/36 = **4/9 = 0,44…**
7	24	25	49	**25/49 = 0,51…**
...	...	...	...	...
10	36	64	100	0,64 < 2/3
11	40	81	121	**0,669…**
12	44	100	144	**0,694…**
13	48	121	169	**0,715…**

14	52	144	196	**0,734…**
15	56	169	225	0.751… >3/4
16	60	196	256	0,765..

- Déduire de l'observation de la croissance des rapports « nombre de carrés blancs/nombre total de carrés » (que la demande de M. Ronay ne pourra être satisfaite et que Mme Gratin pourra choisir entre les modèles de 11 à 14 carrés de côté.

Ou, par l'algèbre, le problème consiste à envisager les nombres de carrés gris, blanc ... en fonction du nombre n de carrés sur un côté. Par exemple : carrés gris : $4n - 4$ ou $4(n - 1)$; carrés blancs $(n - 2)^2$, nombre total : n^2 ; rapport blanc/total : $(n - 2)^2/ n^2$. On obtient une impossibilité pour la demande de M Ronay, car cela supposerait $[n / (n - 2)]^2 = 2$ dont la racine carrée est irrationnelle. Celle de Mme Gratin conduit aux inéquations du deuxième degré $8n^2 < 12(n - 2)^2 < 9n^2$ donnant les solutions 11, 12, 13, ou 14, obtenues par un tableau tel que le précédent.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : fj

17. ALADIN ET LE TRESOR D'ALI BABA (Cat. 8, 9, 10)

Aladin est sur les traces du trésor d'Ali Baba. À un certain moment, il se trouve devant une bifurcation d'où partent deux sentiers dont l'un conduit à la grotte au trésor et l'autre dans le désert. Aladin ne sait pas lequel choisir.

L'un des deux sentiers porte des marques jaunes, l'autre des marques rouges. Les deux sentiers sont surveillés par deux étranges personnages dont on sait que l'un dit toujours la vérité et l'autre ment toujours. Aladin ne se décourage pas, il s'engage sur le sentier jaune et quand il rencontre le gardien, il lui dit :

- *S'il vous plaît, répondez à ma question par oui ou par non :*

Si je demandais à votre ami qui surveille le sentier rouge si c'est son sentier qui conduit au trésor, que me répondrait-il ?

Selon la réponse obtenue, Aladin est certain de pouvoir comprendre quel est le sentier qui conduit au trésor.

Comment Aladin peut-il trouver le sentier qui conduit au trésor ?

Expliquez votre raisonnement de manière détaillée.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique, raisonnement hypothético-déductif

Analyse de la tâche

- Raisonner à partir d'hypothèses sur la réponse obtenue et sur les comportements des deux personnages et constater que l'on peut conclure en fonction de cette réponse :
  - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune est menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « non ». Il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
  - Si la réponse est « oui », et si le gardien du sentier jaune dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « oui ». Ce gardien ne serait donc pas sur le sentier du trésor et il faut donc qu'Aladin continue sur le sentier jaune.
  - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est le menteur, alors le gardien du sentier rouge, qui est celui qui dit la vérité, répondrait « oui », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
  - Si la réponse est « non », et si le gardien du sentier jaune est celui qui dit la vérité, alors le gardien du sentier rouge, qui est le menteur, dirait « non », il faut donc qu'Aladin change de sentier.
- Se rendre compte que pour chacune des réponses « oui », Aladin doit continuer sur le sentier jaune et que, en cas de réponse « nn, il doit changer de sentier.

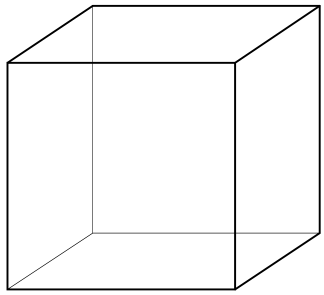
Ou, comprendre que la réponse obtenue est le résultat d'un mensonge et d'une vérité, quel que soit leur ordre. Elle est donc un mensonge. Si c'est « oui », il faut comprendre « non » et rester sur le sentier jaune, si c'est « non », il faut comprendre « oui » et changer de sentier.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

18. UN POLYEDRE DANS UN CUBE (Cat. 9, 10)

Un jour le professeur Tournecube qui contemplait un cube transparent imagina des segments joignant les centres des faces qui ont une arête commune.
Il se demanda alors quelle sorte de polyèdre ces segments dessinaient dans l'espace.



Dessinez et décrivez ce polyèdre (nom, nombre de sommets, d'arêtes, nombre et forme des faces).

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

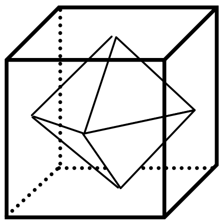
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie dans l'espace, cube, octaèdre

Analyse de la tâche

- Noter qu'un cube a 6 faces. Le centre de chacune de ces faces sera un sommet du polyèdre cherché ; ce dernier aura 6 sommets
- Remarquer que d'un sommet du polyèdre cherché, partent 4 arêtes le joignant aux centres des faces contiguës. Dans ce décompte, chaque arête est comptée deux fois, cela donne 12 arêtes pour le polyèdre.
- Observer que chaque face de ce polyèdre est formée d'un triangle placé face à un des sommets du cube. Il y a donc 8 faces dans le polyèdre.
- Comme la distance des milieux de deux faces contiguës du cube est la même pour tous les couples de faces, les faces du polyèdre sont des triangles équilatéraux.
- Le polyèdre est donc un octaèdre.
- Dessiner le polyèdre et répondre aux 5 autres demandes : octaèdre, 6 sommets, 8 faces, 12 arêtes, faces triangulaires



Niveaux : 9, 10

Origine : Franche-Comté

19. L'AQUARIUM (Cat. 9, 10)

Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle. Il contient 200 poissons.
Durant une rénovation on décide d'augmenter de 20% chacune des dimensions de l'aquarium pour pouvoir y mettre davantage de poissons. On souhaite bien sûr que chaque poisson ait à sa disposition un volume d'eau au moins égal à celui qu'il avait précédemment (on suppose que tous les poissons sont de la même taille et ont besoin du même volume d'eau).

Combien de poissons pourra contenir, au maximum, le nouvel aquarium ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité, calcul de pourcentages, calculs de volumes
- Algèbre : usage de variables

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : que le nombre de poissons est proportionnel au volume de l'aquarium.
- Comprendre que les dimensions du parallélépipède ne sont pas une donnée nécessaire et les désigner provisoirement par des lettres, par exemple *a, b, c* ou choisir une mesure pour chaque dimension.
- Trouver les nouvelles dimensions, augmentées de 20%: (6/5)*a*, (6/5)*b*, (6/5)*c* et le nouveau volume (216/125)*abc*.
- Poser une proportion en choisissant comme inconnue le nombre de poissons: 216/125 = *x* / 200

  On obtient *x* = 345,6 ou 216/125 x 200 = 1628/5

Ou, *V* étant le volume initial de l'aquarium : *V*/ 200 est le volume dont disposait initialement chaque poisson.

Augmenter les dimensions de 20%, c'est les multiplier par 1,2 (ou 6/5).
Si les dimensions sont multipliées par 1,2 alors le volume est multipliés par $1{,}2^3$.

Le nouveau volume est alors *V*(1,23) et le nombre maximum de poissons est inférieur ou égal à *V*(1,23) / (*V*/200), c'est-à-dire inférieur ou égal à 200 (1,23) = 345,6

- Donner une approximation par défaut du résultat obtenu : le nombre maximum de poissons que le nouvel aquarium pourra accueillir est 345.

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

20. JEU EQUITABLE (Cat. 9, 10)

Pierre et Jean ont chacun un grand sac de billes et un dé (classique, de six faces ayant de 1 à 6 points par face). Pierre propose un jeu à son ami :

- A chaque partie chacun de nous lance son dé. Si sur les deux dés apparaît le même nombre de points, tu me donnes 6 billes. Autrement, je te donne 1 bille.

Jean réfléchit et dit :

- Non, il me semble que le jeu n'est pas équitable. « 6 billes contre 1 bille», c'est vraiment trop ! À la longue, je perdrais toutes mes billes. Je te propose de te donner 5 billes si les deux nombres de points sont égaux et que tu me donnes 2 billes s'ils sont différents. Le jeu sera alors équitable.

Pierre répond :

- Mais non, « 5 billes contre 2 billes », ce n'est pas équitable. C'est moi qui perdrais toutes mes billes à la fin.

Selon vous :

Le jeu est-il équitable avec « 6 billes contre 1 bille » comme le propose Pierre ?

ou avec « 5 billes contre 2 billes », comme le propose Jean ?

Si non, quels nombres de billes proposeriez-vous pour le rendre équitable ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Probabilités : notion d'espérance de gain
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- À partir des deux propositions, de Pierre et de Jean respectivement, se rendre compte que le gain de Pierre de 6 billes (ou de 5 billes) en cas de « double » vaut 6 fois (ou 2,5 fois) le gain de Jean de 1 bille (ou de 2 billes) lorsque les dés donnent des nombres différents. Il faut donc, pour que le jeu soit « équitable », ou pour « compenser », que Jean gagne plus souvent que Pierre.
- Penser alors, comme le suggèrent les commentaires de Pierre et de Jean, qu'il faut estimer les gains de chacun des deux joueurs lorsqu'ils jouent un grand nombre de parties, sachant que Jean doit gagner plus souvent que Pierre.
- Déterminer alors le nombre de lancers de dés favorables à l'un et à l'autre des joueurs : comprendre que quand on lance deux dés, on peut obtenir 36 paires différentes. (La combinaison de chacun des 6 nombres d'un dé avec les 6 nombres de l'autre dé peut être visualisée par un tableau de 6 x 6, par un diagramme en arbre, par une liste de toutes les paires …).
- Éventuellement, il faudra surmonter l'obstacle (ou la tentation) de compter deux tirages « symétriques » comme (5 , 6) et (6 , 5) pour un seul et même tirage. La confusion dans ce comptage conduit à 21 paires : (1 , 1), (1 , 2), … (1 , 6), (2 , 2), (2 , 3) … (2 , 6), (3 , 3), … (5 , 6), (6 , 6).
- Observer qu'il y a 6 « doubles » parmi les 36 paires possibles. Pierre a donc 6 tirages favorables sur 36 et Jean en a 30 sur 36.
- Estimer les gains « espérés »de chacun des joueurs sur 36 parties, en supposant que chaque tirage a « la même chance » d'apparaître (ou qu'on pourra répéter les 36 parties de très nombreuses fois) :
  - dans « 6 contre 1 », sur 36 parties Pierre pourrait espérer gagner 6 x 6 = 36 (billes) et Jean 30 x 1 = 30 (billes),
  - dans « 5 contre 2 », sur 36 parties Pierre pourrait espérer gagner 6 x 5 = 30 (billes) et Jean 30 x 2 = 60 (billes).

  Dans les deux cas, l'estimation montre que le jeu n'est pas équitable.
- Pour rendre le jeu équitable, il faut que Jean et Pierre puissent espérer des gains égaux de billes. Par exemple, en remplaçant 6 par X, le jeu proposé par Pierre devient « X contre 1 ». Sur 36 parties, on obtient : $6 \times X = 30 \times 1$ (billes) d'où $X = 5$. Jean devrait donner 5 billes à Pierre en cas de « double » contre une 1 bille que Jean recevrait de Pierre (dans les 30 autres cas).

  Les rapports « 10 contre 2 », « 15 contre 3 » … proportionnels à « 5 contre 1 » sont aussi acceptables.

  En cas de confusion dans le dénombrement des tirages possibles (21 au lieu de 36), 6 seraient favorables à Pierre et 15 seulement à Jean. L'espérance des gains sur 21 parties serait la même pour les deux joueurs : 6 x 5 = 30 (billes) pour Pierre et 15 x 2 = 30 (billes) pour Jean.

Niveaux : 9, 10

Origine : Franche-Comté