ARMT – Association L'Association du Rallye Mathématique Transalpin

À la découverte du Rallye Mathématique Transalpin

Épreuve d'entraînement pour la participation au rallye en Suisse romande

Novembre 2015 © ARMT

À quoi sert une épreuve d'entraînement ?

1. À faire vivre aux élèves une épreuve du RMT au cas où ils n'en auraient encore jamais fait.
2. À apprendre aux élèves à travailler sous leur entière responsabilité, sans aucun appel au maître et sans que ce dernier ne vienne les influencer (en passant derrière eux, en leur jetant des regards approbateurs ou réprobateurs, en les interrompant dans leur recherche, en commentant leur travail ou en induisant leur manière de chercher …).
3. À apprendre aux élèves les règles du Rallye: chercher, seuls ou par groupes, les solutions aux problèmes proposés. Avec l'aide de tout le matériel dont ils disposent habituellement en classe (calculatrice, multicubes, ciseau, dés, …). Rédiger et choisir une seule réponse par problème pour la classe, souvent avec explications.
4. À ouvrir un débat après l'épreuve, entre élèves, avec la participation du maître, sur le déroulement de l'épreuve : organisation du travail, par groupes ou individuellement, la qualité des réponses et des explications, les contrôles (les feuilles réponses ont-elles été vérifiées par d'autres élèves, au sein du groupe ou par d'autres groupes), les discussions (y a-t-il eu des échanges lorsque deux solutions différentes sont apparues?), pourquoi certains problèmes n'ont-ils pas été résolus correctement – si c'est le cas ?
5. À décider de la participation de la classe au Rallye, en accord entre le maître et les élèves.

Comment organiser une épreuve d'entraînement ?

1. Après avoir discuté avec les élèves d'une éventuelle participation au Rallye, décider d'une période de 45 minutes au moins, préparer quatre à cinq photocopies de chaque énoncé de problème que les élèves se répartiront.
2. Donner les consignes : durée 45 à 50 minutes, une résolution par problème pour la classe, sur des feuilles différentes (préparées par le maître), avec explications claires.
3. Donner les feuilles d'énoncés à la classe**.** La distribution interne est sous la responsabilité des élèves.
4. Noter l'heure et ne plus intervenir, d'aucune manière, durant tout le travail (attitude neutre, aucune aide technique ni matérielle, etc.). 10 minutes avant la fin, indiquer le temps qu'il reste et rappeler aux élèves qu'ils doivent préparer leurs réponses avec les explications nécessaires.

   La seule différence entre le déroulement de l'épreuve d'entraînement et celui des épreuves suivantes est que l'enseignant reste dans la classe, qu'il peut observer (de loin, sans influencer le travail des élèves). Lors du concours, les enseignants "s'échangent" les classes afin de ne pas influencer, même sans le vouloir, le comportement des élèves.

Que faire après l'épreuve?

1. Lire les copies rendues, les évaluer. On peut éventuellement attribuer des points à des fins de comparaison avec des résultats obtenus pour le problème lors des passations précédentes (il n'est pas possible, sur la base d'une seule copie, de pouvoir émettre un jugement).
2. Organiser un débat (voir plus haut) sur le déroulement, l'organisation, la qualité des réponses et des explications, la manière d'améliorer le travail de la classe et les collaborations (échanges, contrôles, formation de groupes, …)
3. Eventuellement, profiter de l'intérêt suscité pour exploiter l'un ou l'autre des problèmes avec l'ensemble des élèves, dans le cadre du parcours d'apprentissage de la classe.
   Toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'il est difficile d'exploiter un problème sur lequel certains élèves ont beaucoup travaillé, et d'autres n'ont pas même lu la donnée. Il est sans doute plus judicieux de choisir un "autre problème" par exemple d'une catégorie inférieure afin que la majorité des élèves puisse s'y intéresser et, idéalement, le résoudre. Les démarches et la présentation de la solution, souvent différentes, permettront déjà suffisamment de débattre pour "valider" la meilleure solution que l'on déciderait d'envoyer dans ce cas-là. Cet exercice n'est de loin pas évident, y compris pour l'enseignant !

Problèmes	**Catégories**						**Thèmes**
	Degrés Harmos	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
1.	**Gourmandises**	3	4					Vision spatiale
2.	**Bien cachés**	3	4					Reconnaissance, dénombrement de triangles
3.	**Pyramides de briques (I)**	3	4					Additions et soustractions dans N
4.	**Le sentier dans le parc**	3	4	5				Opérations sur des nombres relatifs
5.	**Vacances d'hiver**	3	4	5				Combinatoire
6.	**Dîner aux chandelles**		4	5	6			Décomposition en sommes de multiples
7.	**Parties de billes**			5	6			Additions et soustractions dans Z
8.	**L'anniversaire**			5	6	7		Numération en base douze
9.	**Le téléphone de Louise**			5	6	7		Recomposition arithmétique
10.	**Trois amis et leurs dessins**			5	6	7		distinction entre aire et périmètre
11.	**Pyramides de briques (II)**				6	7	8	Additions et soustractions dans N
12.	**Des triangles, oui, mais combien?**				6	7	8	Dénombrement triangles
13.	**Le parterre de tulipes**					7	8	Nombres rationnels
14.	**Bâtonnets et triangles**					7	8	Inégalité triangulaire
15.	**Date de naissance**						8	Temps et Durées
16.	**Quadrillage**						8	Partge d'un rectangle
17.	**Les nombres de M. Trapèze**						8	Suites de nombres

Rappel : les catégories ne sont pas identiques aux degrés Harmos ! Veiller à cela lors de l'inscription. De même, seuls les problèmes de la catégorie doivent être résolus ! Tout problème supplémentaire ne sera pas corrigé et donc ne rapportera aucun point supplémentaire.

Une classe de 6e Harmos concourt en catégorie 4 et doit résoudre les problèmes 1 à 6.
Une classe de 8e Harmos est en catégorie 6 et doit résoudre les problèmes 6 à 12.
Les élèves n'ont pas à se préoccuper de cela, c'est à l'enseignant qu'il incombe de photocopier les problèmes concernant sa classe.
Il est toujours difficile de déterminer si pour un élève donné, un problème sera plus simple à résoudre qu'un autre. Mais comme la liste ci-dessous le montre, plus le numéro du problème est grand, plus il est destiné à des élèves âgés. Il est donc judicieux d'inviter les élèves qui pourraient se sentir "dépassés" par la difficulté de chercher à résoudre plutôt un problème ayant un petit numéro.

La Suisse romande est une des sections de l'ARMT et le tessin est l'autre section suisse.
Les autres sections proviennent principalement d'Italie, de France, de Belgique et du Luxembourg.

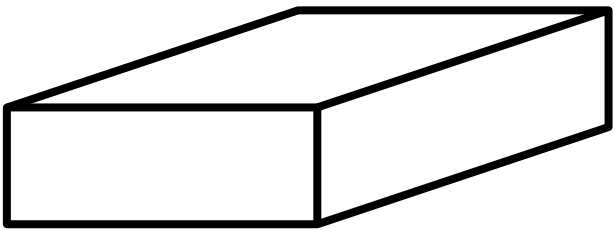
En Suisse romande, la concours n'est proposé que jusqu'en catégorie 8 (10e Harmos). Les tableaux de statistiques plus bas indiquant les réultats de toutes les sections, les catégories 9 et 10 y figurent aussi.

Pour plus d'informations et inscriptions pour le rallye en Suisse romande : http://www.rmt-sr.ch
Pour plus d'Informations sur l'ARMT : http://www.armtint.org/fr

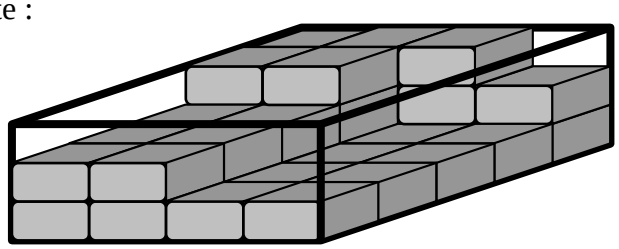
Les pages 32 à 48 sont uniquement destinées à simplifier le photocopiage pour vos élèves.

1. GOURMANDISES (Cat. 3, 4)

Maman a acheté une boîte de chocolats et l'a posée sur la table.
Voici la boîte, pleine mais encore fermée, avec son couvercle :



Le lendemain matin, quand elle ouvre la boîte, elle découvre que ses enfants ont déjà mangé une partie des chocolats.
Voici ce qu'il reste :



Combien de chocolats y avait-il dans la boîte quand elle était pleine ?

Combien de chocolats les enfants ont-ils déjà mangés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Résumé

Déterminer le nombre de briques (p.r.) identiques contenues dans une boîte pleine – aussi en forme de brique- d'après un dessin représentant la boîte ouverte où il manque des « briques » et où l'on peut percevoir la structure 3 x 4 x 5.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Lire la représentation en perspective (comme une photo) : comprendre que tous les chocolats présents dans la boîte ne sont pas visibles sur la représentation, percevoir les couches, les empilements, …
- Comprendre que la boîte pleine comporte 3 étages de 4 rangées de 5 chocolats ou de 5 rangées de 4 chocolats, c'est-à-dire $5 \times 4 \times 3 = 60$.
- Déterminer le nombre de chocolats qui restent dans la boîte (par exemple couche par couche : 20 + 12 + 5 = 37), effectuer la différence (60 – 37 = 23) pour trouver les chocolats déjà mangés.

Ou : déterminer visuellement le nombre de chocolats manquants, parties par parties, et les additionner (par exemple 6 sur la partie supérieure « à gauche », plus 2 couches de 8 chocolats chacune. plus le chocolat en haut à droite : 6 + 16 + 1 = 23)

Points obtenus, sur 799 classes de 18 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 3	13%	29%	20%	19%	18%	356	2.0
Cat. 4	7%	14%	26%	21%	32%	443	2.6
tot	**10%**	**21%**	**24%**	**21%**	**26%**	799	**2.3**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponses exactes (60 et 23) avec explications claires et détaillées

3 Réponses exactes avec explications peu claires ou incomplètes
ou une seule « petite » erreur de comptage (60 et 22 ou 60 et 24) avec explications claires et détaillées

2 Réponses exactes sans explications
ou une seule des deux réponses correctes (60 ou 23) avec réponse erronée ou pas de réponse pour l'autre, avec explications
ou les deux réponses, bien expliquées, mais avec deux erreurs de calcul ou de comptage

1 Une seule des deux réponses, sans explication
ou début de raisonnement correct avec des essais de comptages

0 Incompréhension du problème

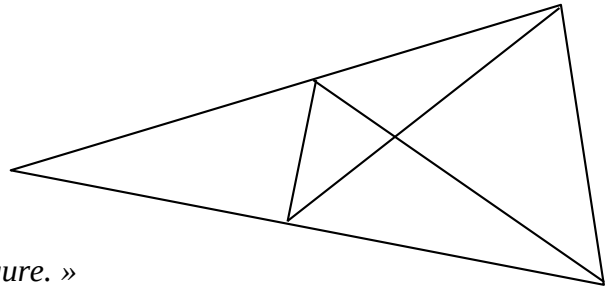
Premiers commentaires

Réussite moyenne avec progression qui semble significative

À exploiter : la multiplication 3 x 4 x 5, confrontée aux comptages par niveaux ou pièce par pièce

2. BIEN CACHÉS (Cat. 3, 4)

André et Danièle observent cette figure :



André dit : « *Je vois 5 triangles dans cette figure.* »
Danièle lui répond : « *Moi, j'en vois beaucoup plus que ça !* »

Combien peut-on voir, en tout, de triangles différents dans cette figure ?

Indiquez clairement tous les triangles que vous avez trouvés.

Résumé

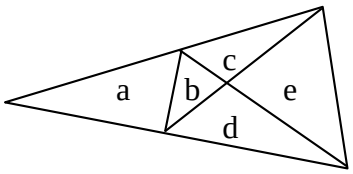
Déterminer le nombre de triangles que l'on peut observer dans une figure composée d'un triangle et de tous les segments dont les extrémités sont les trois sommets et deux autres points choisis sur deux côtés différents

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Après avoir observé que la figure se décompose en 5 triangles distincts (pavage de cinq « pavés »), prendre en compte la remarque de Danièle et se demander comment elle en voit d'autres. Observer alors qu'il est possible de voir apparaître des triangles « plus grands », formés de deux, trois … pavés de base.
- Trouver alors quatre nouveaux triangles formés de deux pavés, deux triangles formés de trois pavés et le triangle complet (Au total, 12 = 5 + 4 + 2 + 1).

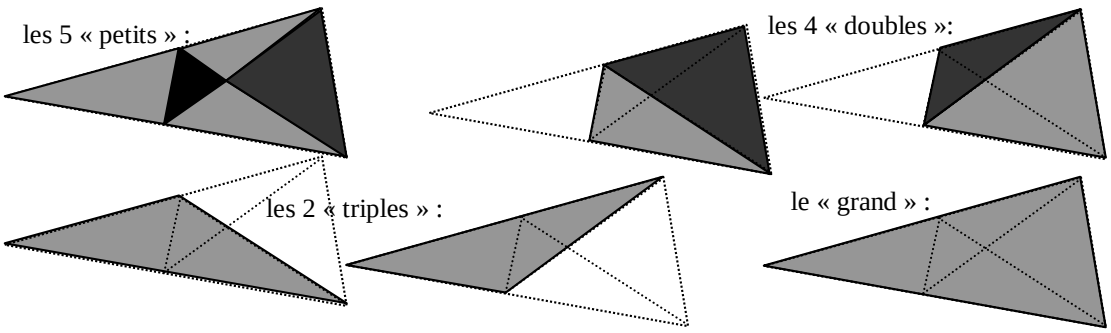
  (Si l'on n'envisage pas les triangles comme des pavés ou des « surfaces », l'inventaire peut s'établir à partir des sommets ou à partir des segments de la figure, pris trois par trois.)
- La deuxième tâche, la plus délicate, consiste à « indiquer clairement » les 12 triangles trouvés, en évitant les doublons et sans oublis :

  soit en désignant les cinq triangles de base par une lettre (a, b, c, d, e) ou un numéro ou une couleur,



  puis en nommant les 12 triangles : a, b, c, d, e, bc, bd, ce, de, abc, abd, abcde ;

  soit par des dessins de couleur, en pensant à dessiner plusieurs figures pour que l'inventaire soit « lisible » (l'utilisation de 12 couleurs sur la même figure rend l'inventaire presque « illisible ») :



Points obtenus

sur 783 classes de 18 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 3	30%	21%	22%	15%	12%	351	1.6
Cat. 4	21%	15%	20%	22%	22%	432	2.1
tot	**25%**	**17%**	**21%**	**19%**	**18%**	**783**	1.9

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (les 12 triangles) avec un inventaire clair et complet (texte ou dessins)

3 Réponse correcte (12) avec une présentation confuse (par exemple, où il est très difficile de distinguer les différents triangles qui se superposent)
ou 13 (ou 11) triangles bien présentés mais avec un doublon (ou un oubli)

2 Réponse avec de 2 à 4 oublis (8 à 10 triangles présentés) sans doublons
ou réponses avec 1 ou 2 oublis et 1 ou 2 doublons

1 Réponse ne faisant apparaître que 6 à 7 triangles

0 Incompréhension du problème
ou moins de 6 triangles
ou réponses avec d'autre polygones non triangles

Premiers commentaires

Réussite moyenne avec progression qui semble significative de la catégorie 3 à la catégorie 4

peu d'incompéhensions.

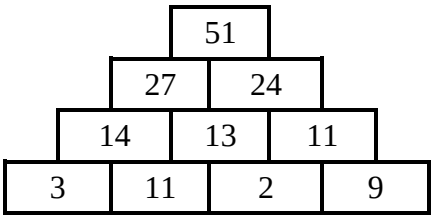
À observer :

- les différentes manières de présenter les résultats ; par des symboles, par des coloriages, sur une ou plusieurs figures, réfuter ou confirmer la procédure par sommets ou côtés
- erreurs les plus fréquentes : doublons, oublis d'un triangle particulier

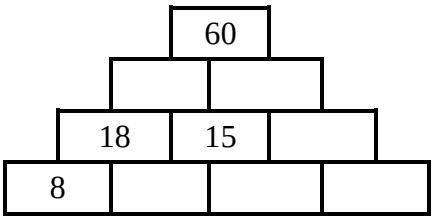
Tous les problèmes d'inventaires de triangles font appel évidemment à la reconnaissance de la figure géométrique (trois côtés et/ou trois sommets) mais aussi aux isométries, à la combinatoire, à la rigueur d'un dénombrement.

3. PYRAMIDES DE BRIQUES (I) (Cat. 3, 4)

Dans ces pyramides, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante :
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.
Par exemple : 14 est le nombre de la brique posée sur les briques 3 et 11 car 14 = 3 + 11,
51, le nombre de la brique du haut, est la somme de 27 et 24.



Écrivez les nombres qui manquent pour compléter la pyramide ci-dessous, avec la même règle :



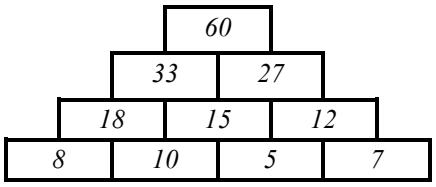
Notez tous les calculs que vous avez faits pour trouver les nombres manquants.

Résumé

Compléter une « pyramide » de quatre étages (4, 3, 2, 1 nombres par étage) à partir de quatre nombres donnés, en respectant la règle selon laquelle chaque nombre est la somme des deux nombres sur lesquels il est situé. La chaîne de déductions se construit par des opérations « directes » (sans hypothèses), les nombres sont naturels et inférieurs à 100.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre le fonctionnement de la pyramide.
- Trouver les deux nombres qui peuvent être complétés en utilisant directement les nombres présents dans la pyramide : pour 10 par une soustraction (18 – 8 = 10) ou par une addition lacunaire (8 + ? = 18) ; pour 33 par une addition (18 + 15 = 33).
- Continuer de la même façon pour les quatre autres briques, par une suite d'additions lacunaires ou de soustractions : par exemple : 27 = 60 – 33; 10 + ? = 15 ; 15 + ? = 27, 12 – 5 = 7. (Pour les premières étapes, on a le choix entre deux briques à compléter, mais la solution est unique) :



Points obtenus

sur 1308 classes de 20 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 3	12%	6%	14%	21%	47%	355	2.8
Cat. 4	6%	5%	8%	27%	55%	443	3.2
Cat. 5	3%	2%	8%	21%	65%	510	3.4
tot	**6%**	**4%**	**10%**	**23%**	**57%**	**1308**	**3.2**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Solution complète, les six nombres manquants (33, 27, 10, 5, 12 et 7) avec les six opérations notées correctement : l'addition 18 + 15 = 33, puis les soustractions 60 – 33 = 27 … ou additions « lacunaires complétées » : 33 + 27 = 60, etc.

3 Solution complète avec de 3 à 5 opérations notées

2 Solution complète avec moins de 3 opérations notées
ou un ou deux nombres manquants
ou une seule erreur de calcul (et tous les autres nombres en cohérence avec l'erreur, par exemple 27 – 15 = 11 et 11 – 5 = 6 pour les deux briques de droite)

1 Solution avec plus de deux nombres manquants (avec ou sans erreur de calcul)
ou deux erreurs de calcul

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Très bonne réussite, avec progression qui semble significative de la catégorie 3 à la catégorie 5. Trop facile en catégorie 5.

Les additions sont simples et directes, les soustractions peuvent n'être que des additions lacunaires, lorsqu'on a compris la règle, le problème devient un « petit jeu de construction » sans prétentions.

4. LE CHEMIN DANS LE PARC (Cat. 3, 4, 5)

Catherine joue dans le parc en se déplaçant sur un long chemin fait de dalles placées les unes à la suite des autres.
Pour savoir quel déplacement elle va faire, elle lance un jeton qui a une face verte et une face rouge.
Si c'est la face verte qui apparaît lorsque le jeton est tombé, Catherine avance de 4 dalles.
Si c'est la face rouge, elle recule de 2 dalles.
Au début du jeu, Catherine était sur la treizième dalle. À la fin du jeu, elle est sur la vingt-et-unième dalle.
Catherine a vu apparaître la face verte cinq fois.

Combien de fois la face rouge est-elle apparue ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Résumé

Dans une addition qui conduit de 13 à 21 par quatre termes "+4" et des termes "-2", trouver le nombre de ces derniers; dans un contexte de sauts en avant et en arrière sur piste de nombres.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que les déplacements se décident à « pile ou face », correspondant chacun à l'un des deux déplacements possibles sur la suite des dalles ; que Catherine s'est déplacée globalement de la 13e à la 21e dalle en plusieurs fois dont cinq de 4 dalles vers l'avant. Comprendre encore que l'ordre des déplacements vers l'avant ou vers l'arrière n'est pas donné et qu'il dépend de la face du jeton.
- Trouver éventuellement des modèles pour s'approprier la situation ; par exemple que le chemin des dalles correspond à un « ruban » ou une « piste » des nombres, que les déplacements correspondent à des additions de 4 ou des soustractions de 2.

Il y a plusieurs procédures (ou stratégies) pour aborder la tâche des calculs :

- Par tâtonnements et essais en partant de 13 et en avançant de 4 et reculant de 2 jusqu'à obtenir 21 ou par une suite d'opérations, par exemple : 13 + 4 – 2 – 2 – 2 + 4 + 4 + 4 – 2 … = 21. Au cours de ces essais, les élèves peuvent voir que l'ordre des déplacements n'a pas d'importance sur le résultat final et qu'on peut se retrouver à certains moments avant 13 ou au-delà de 21.
- En envisageant globalement les déplacements, calculer que les5 faces « vertes », correspondent à une avance de 20 dalles (par addition de 5 termes « 4 » ou par multiplication 5 × 4) et que Catherine a avancé de 8 dalles (de la 13e à la 21e), c'est-à-dire 12 dalles de moins que ces 5 déplacements. (Ou si ces cinq faces vertes correspondaient aux 5 premiers déplacements, Catherine serait arrivée sur la 33e dalle, mais comme elle se trouve sur la vingt-et-unième à la fin, elle a reculé de 12 dalles (33 – 21). Ou encore si ces cinq faces vertes correspondaient aux 5 derniers déplacements, Catherine serait partie de la dalle 1 (21 – 20) pour finir sur la dalle 21 et aurait donc reculé de 12 dalles (13 – 1) lors des premiers déplacements).

  Comme chaque face « rouge » correspond à un recul de 2 dalles, en déduire que les faces « rouge » sont apparues 6 fois dans le recul global de 12 dalles (12 : 2).

  (Ces opérations peuvent s'illustrer par des déplacements sur une « droite numérique».)

Points obtenus

sur 1306 classes de 20 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 3	38%	11%	12%	12%	27%	355	1.8
Cat. 4	19%	14%	12%	14%	41%	441	2.4
Cat. 5	9%	7%	13%	14%	57%	510	3.0
tot	**20%**	**11%**	**12%**	**13%**	**44%**	**1306**	**2.5**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (6 fois la face rouge) avec explications, ou calculs, ou représentation graphique clairs et complets de la démarche suivie

3 Réponse correcte avec explication ou calculs ou représentation graphique peu clairs ou incomplets
ou inversion des mots rouge et vert seulement dans la réponse mais démarche correcte

2 Réponse correcte sans explication
ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul mais avec explications

1 Début de recherche correcte témoignant de la compréhension des déplacements possibles

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Réussite en nette progression de la catégorie 3 à la catégorie 5

Le fort pourcentage « d'incompéhension du problème » en catégorie 3 (38%) laisse penser qu'il y a de sérieux obstacles d'appropriation de la situation

5. VACANCES D'HIVER (Cat. 3, 4, 5)

Pour ses vacances d'hiver, Michel veut acheter une tenue composée d'une veste, d'un pantalon et d'un bonnet.
Le pantalon, la veste et le bonnet sont disponibles chacun en 3 couleurs : rouge, jaune et bleu.
Michel ne veut pas de pantalon rouge. Il veut aussi que la couleur du pantalon soit différente de celle de la veste et de celle du bonnet.

Combien de tenues différentes Michel peut-il composer ?

Pour chaque tenue que vous avez trouvée, indiquez la couleur de la veste, du pantalon et du bonnet.

Résumé

Trouver les arrangements de 3 couleurs prises 3 à trois, avec des restrictions qui conduisent à 2 x 2 x 2, dans un contexte de tenues (veste. pantalon, bonnet) de couleurs différentes.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre les informations sur les catégories de vêtements et les contraintes sur leurs couleurs et en déduire que le pantalon peut être jaune ou bleu et utiliser le fait que la veste et le bonnet ont une couleur différente de celle du pantalon.
- Interpréter correctement la deuxième contrainte et admettre que la veste et le bonnet peuvent avoir ou non la même couleur.
- Organiser les solutions possibles en partant d'une hypothèse sur la couleur du pantalon, ou sur celle de la veste ou encore celle du bonnet et s'aider éventuellement d'un diagramme en arbre, d'un tableau ou d'une liste ordonnée. (Il s'agit ici d'une structure liée à la multiplication $2 \times 2 \times 2$, qui permet d'obtenir les 8 tenues « différentes » du point de vue des couleurs)

Pantalon B	Bonnet R	Veste R	Pantalon J	Bonnet R	Veste R
"	"	Veste J	"	"	Veste B
"	Bonnet J	Veste R	"	Bonnet B	Veste R
"	"	Veste J	"	"	Veste B

Ou : former les tenues (pantalon, veste, bonnet) de manière non organisée (en recourant éventuellement à des dessins ou des découpages) et éliminer ceux qui ne respectent pas les conditions (avec risques d'oublis ou de solutions non conformes).

Ou : écrire l'ensemble des triplets (pantalon, veste, bonnet) des trois couleurs ($27 = 3 \times 3 \times 3$) et éliminer ceux qui ne correspondent pas aux conditions (avec risques de solutions non conformes).

Points obtenus

sur 1309 classes de 20 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 3	16%	33%	36%	7%	8%	356	1.6
Cat. 4	8%	24%	40%	7%	21%	443	2.1
Cat. 5	4%	15%	47%	8%	27%	510	2.4
tot	**8%**	**23%**	**41%**	**7%**	**20%**	**1309**	**2.1**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (les 8 possibilités) avec explication claire et / ou tableaux, schémas, dessins exhaustifs de toutes les possibilités

3 Réponse correcte (les 8 possibilités) avec explications incomplètes
ou 6 ou 7 possibilités correctes, sans autres possibilités inexactes ou répétées

2 Réponse correcte (les 8 possibilités) sans aucune explication
ou 5 possibilités correctes, sans autres possibilités inexactes ou répétées
ou 6, 7 ou 8 possibilités correctes, avec d'autres inexactes ou répétées
ou les 4 possibilités sans les vestes et bonnets de mêmes couleurs BRJ, BJR, JRB, JBR

1 Autre réponse comportant au moins une possibilité correcte

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Réussite en nette progression de la catégorie 3 à la catégorie 5

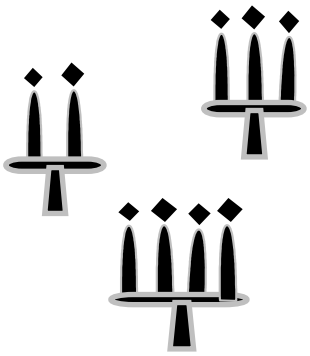
Le 41% de « 2 points » fait penser qu'il y a beaucoup d'oublis.

À exploiter :

- la rigueur des procédures
- les écritures, multiplicatives ou non ou les schémas (en arbre, sous forme de listes…)

6. DÎNER AUX CHANDELLES (I) (Cat. 4, 5, 6)

Laura a organisé un dîner dans son jardin. Pour créer une belle atmosphère, elle éclaire la table avec des chandeliers à deux branches, à trois branches et à quatre branches.
Elle choisit au moins un chandelier de chaque sorte et sur chacun d'eux, elle met une bougie par branche.
Laura compte qu'elle a mis 20 bougies en tout sur les chandeliers qu'elle a utilisés.



Comment Laura a-t-elle pu placer les 20 bougies ?

Donnez toutes les possibilités.

Indiquez pour chacune le nombre de chaque type de chandeliers et expliquez votre raisonnement.

Résumé

Dresser l'inventaire des décompositions de 20 en trois multiples, de 2, de3 et de 4, dans un contexte de chandeliers et bougies.

Mots-clés

arithmétique, addition, multiples, combinatoire

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que les conditions du contexte correspondent, dans le cadre numérique, à la recherche des décompositions de 20 en une somme de termes 2, 3 et 4 (20 = 2 + 2 + … + 3 + 3 + … + 4 + 4 …) ou en somme de multiples de 2, de 3 ou de 4 avec au moins un terme de chaque sorte.
- La recherche des solutions peut se faire par essais successifs au hasard, mais cette procédure ne permet pas de garantir l'exhaustivité.
- Une recherche plus systématique peut s'organiser par types de chandeliers en imposant par exemple le nombre de chandeliers à 4 bougies (ou les multiples de 4) :

  il y a au maximum 3 chandeliers à quatre bougies (5 et 4 ne permettraient pas d'avoir deux autres chandeliers de 2 et 3 branches)

  $20 = 3 \times \mathbf{4} + 8 = 3 \times \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{3} + 1 \times \mathbf{2}$ — **6 chandeliers : 3** de quatre branches, **2** de trois et **1** de deux

  $20 = 2 \times \mathbf{4} + 12 = 2 \times \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{2}$ — **7 chandeliers : 2** de quatre branches, **2** de trois et **3** de deux

  $20 = 1 \times \mathbf{4} + 16$ → $1 \times \mathbf{4} + 4 \times \mathbf{3} + 2 \times \mathbf{2}$ — **7 chandeliers : 1** de quatre branches, **4** de trois et **2** de deux

  $20 = 1 \times \mathbf{4} + 16$ → $1 \times \mathbf{4} + 2 \times \mathbf{3} + 5 \times \mathbf{2}$ — **8 chandeliers : 1** de quatre branches, **2** de trois et **5** de deux

Ou : remarquer que, pour utiliser un chandelier de chaque sorte, Laura a déjà besoin de 9 (2 + 3 + 4) bougies; qu'il en reste 11 à répartir; puis qu'il faudra utiliser au moins un autre chandelier à 3 branches pour obtenir un nombre pair. Il y a ainsi déjà 12 (2 + 3 + 3 + 4) bougies attribuées et il n'en reste plus que 8 à disposer, selon l'une des quatre répartitions: 3 + 3 + 2 = 4 + 4 = 4 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2.

Points obtenus

sur 1851 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 4	19%	22%	18%	25%	16%	443	2.0
Cat. 5	15%	15%	17%	30%	24%	509	2.3
Cat. 6	14%	15%	16%	37%	18%	899	2.3
Tot	**15%**	**17%**	**17%**	**32%**	**19%**	**1851**	**2.2**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse complète et correcte (les quatre répartitions décrites ci-dessus), avec les explications qui montrent qu'il n'y a pas d'autre solution possible

3 Réponse complète et correcte (les quatre répartitions) avec des explications peu claires qui ne permettent pas de savoir si toutes les solutions ont été trouvées

ou réponse avec seulement trois des quatre répartitions possibles

2 Réponse comportant seulement deux répartitions correctes

1 Réponse avec une seule répartition
ou début de recherche avec une somme de termes différente de 20

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Réussite moyenne à bonne

On pourrait observer les fréquences d'écritures purement additives avec les termes 4 et 5 et de celles où interviennent des multiplications pour réduire la longueur des écritures.

On pourrait aussi s'intéresser aux manières de montrer que toutes les solutions ont été trouvées

7. PARTIES DE BILLES (Cat. 5, 6)

Dimanche, Gérard a reçu un beau sac de billes et il décide de les prendre toutes, dès le lendemain à l'école, pour jouer avec ses camarades.
Le lundi, il gagne 12 billes, il est très content.
Le mardi, il rejoue, mais il perd 15 billes. Il n'est pas content.
Le mercredi, il perd encore 8 billes. Il est bien triste. De retour chez lui, il compte ses billes et il constate qu'il a perdu la moitié des billes qu'il avait le dimanche lorsqu'il a reçu son sac.
Le jeudi, il ne joue pas car il a peur de perdre encore plus de billes.
Le vendredi, il hésite, mais joue tout de même et gagne 7 billes.

Combien a-t-il de billes dans son sac le vendredi soir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Résumé

Dans une succession de quatre transformations numériques successives, déterminer l'état final connaissant les quatre transformations et le rapport 1/2 entre l'état après la troisième transformation etl'état initial, dans un contexte de parties de billes.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Lire le problème et se rendre compte qu'il s'agit d'une suite d'additions et soustractions à effectuer, mais qu'on ne connaît pas l'état initial (dimanche).
- Constater que du lundi au mercredi, les variations sont un gain de 12, et deux pertes de 15 et 8, ce qui revient globalement à une perte de 11 (15 + 8 – 12).

  Tenir compte alors que cette perte de 11 est la moitié des billes du dimanche et que le sac contenait donc 22 billes ce jour-là. Comprendre alors que ce qui reste du mercredi est aussi 11 et que le vendredi, après un gain de 7, il aura 18 billes. On peut aussi repartir des 22 billes du dimanche pour arriver à 18 le vendredi (22 + 12 – 15 – 8 + 7 = 18)

Ou, procéder par essais à partir du dimanche, d'abord au hasard puis par essais organisés. Par exemple dimanche 30, lundi 42, mardi 27, mercredi 19, qui n'est pas la moitié de 30 et qui demande un second essai, … jusqu'à trouver 22 le dimanche, 11 le mercredi et 18 le vendredi.

Ou procéder par essais à partir du mercredi et revenir dans le temps.

Toutes les démarches peuvent s'appuyer éventuellement sur une bande ou une droite numérique ou sur des dessins qui représentent, de jour en jour la situation

Points obtenus

sur 1403 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 5	32%	30%	7%	11%	19%	508	1.6
Cat. 6	32%	24%	7%	13%	24%	895	1.7
tot	32%	26%	7%	12%	23%	**1403**	1.7

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse, 18 billes le vendredi, avec explications claires (détail des successions jour après jour et organisation des essais)

3 Réponse, 18 billes le vendredi, avec explications peu claires ou seulement une vérification

2 Réponse, 18 billes le vendredi, sans aucune explication
ou une seule erreur de calcul mais avec des explications claires
ou réponse 11 billes le mercredi ou 22 billes le dimanche, avec explications claires (oubli de la question sur le vendredi)

1 Début de raisonnement, succession sur deux ou trois jours mais avec des erreurs de « signes »

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

La moyenne des points attribués est relativement basse et ne varie pas de la catégorie 5 à la catégorie 6.

8. L'ANNIVERSAIRE (Cat 5, 6, 7)

C'est l'anniversaire d'Anita.

Son amie Berthe lui apporte un gâteau au chocolat. Sur ce gâteau, elle a placé 7 bougies qui indiquent l'âge d'Anita : des rouges et des vertes. Chaque bougie rouge vaut dix ans et chaque bougie verte vaut un an.

Son ami Charles lui apporte une tarte aux fraises sur laquelle il a placé 8 bougies qui indiquent aussi l'âge d'Anita : des bleues et des vertes. Chaque bougie bleue vaut douze ans et chaque bougie verte vaut un an.

Quel est l'âge d'Anita ?

Expliquez comment vous avez trouvé son âge.

Résumé

Trouver deux nombres de deux chiffres égaux: l'un écrit en base dix dont la somme des chiffres est 7, l'autre écrit en base douze, dont la somme des chiffres est 8; dans un contexte de bougies et gâteaux d'anniversaire.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Après lecture de l'énoncé, se rendre compte que l'âge d'Anita peut être représenté par les 7 bougies du premier dessert et aussi par les 8 bougies du second. Il faut donc surmonter ce premier obstacle en prenant en compte le changement de valeurs des bougies qui représentent 12 ans (bleues) ou 10 ans (rouges), alors que les vertes ont la même valeur, un an.
- Se rendre compte que, pour le gâteau au chocolat, les 7 bougies peuvent représenter des âges différents, selon leur répartition « vertes ; rouges », puis passer aux nombres possibles, en établissant le rapprochement avec notre système de numération décimal : rouges <–> dizaines et vertes <–> unités. 7 rouges représentent 70, 6 rouges et 1 verte représentent 61 et ainsi de suite : 52 ; 43 ; 34 ; 25 ; 16 ; et 7 (7 et 70 peuvent être éliminés car, selon l'énoncé il y a des bougies des deux couleurs, et en raison des pluriels, vraisemblablement plus d'une de chaque couleur, ce qui permettrait presque d'éliminer aussi 61 et 16). Anita pourrait donc avoir 61, 52, 43, 34, 25 ou 16 ans.
- Avec l'arrivée du dessert de Charles et de ses 8 bougies, il faut remplacer dizaine (bougies rouges) par douzaines (bougies bleues) et dresser l'inventaire des âges possibles : 7 douzaines et 1 unité font 85, 6 douzaines et 2 unités font 74, puis 63, 52, 41, 30, et finalement 19 avec une douzaine et 7 unités. Anita pourrait donc avoir 85, 74, 63, 52, 41, 30, ou 19 ans.
- Comparer les deux listes, constater que le nombre 52 est le seul à figurer dans les deux, en conclure qu'Anita a 52 ans.

Ou tomber sur la solution par essais, sans être certain de l'unicité de la solution.

Points obtenus

sur 2230 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 5	15%	3%	16%	46%	21%	15%	2.5
Cat. 6	20%	3%	12%	48%	17%	20%	2.4
Cat. 7	11%	1%	12%	49%	27%	11%	2.8
tot	16%	2%	13%	48%	22%	16%	**2.6**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (Anita a 52 ans) avec démarche clairement expliquée (inventaire des possibilités pour chaque dessert et comparaisons)

3 Réponse correcte (Anita a 52 ans), avec seulement une vérification ou avec explications confuses

2 Réponse correcte (Anita a 52 ans) sans explications
ou une liste bien établie et une erreur dans l'autre ne permettant pas de déterminer l'âge

1 Une réponse cohérente avec un seul des desserts

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

La moyenne des points attribués est élevée. Plus de 80 % des classes ont trouvé la réponse correcte, selon les critères d'attribution des points.

Il serait intéressant de vérifier si les élèves ont perçu la base dix et la « base douze » où s'ils ont résolu le problème en « passant à côté »

9. LE NUMÉRO DE TÉLEPHONE DE LOUISE (Cat. 5, 6, 7)

Louise a changé de numéro de téléphone et transmet le nouveau numéro à son amie Carla, avec un message sous forme de devinette :

Mon nouveau numéro est composé de 6 chiffres tous différents. Tu dois, en outre, savoir que :
- la somme de tous les chiffres est 15 ;
- le dernier chiffre est la moitié du premier ;
- le deuxième chiffre est le double du premier ;
- l'avant-dernier chiffre vaut 1 de plus que le double du dernier.

Avec ces indices, est-ce que Carla arrivera à trouver le nouveau numéro de Louise et à être sûre de l'appeler du premier coup ?

Quel pourrait être ce numéro ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la solution.

Résumé

Opérations élémentaires sur les nombres de 0 à 5.

Retrouver un numéro de téléphone avec contraintes sur ses chiffres, et deux solutions possibles

Analyse de la tâche:

- Effectuer quelques essais puis constater que, puisque 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5, les six chiffres, différents, dont la somme est 15 ne peuvent être que 0, 1, 2, 3, 4 et 5. (Les chiffres 6 à 9 ne peuvent apparaître dans le numéro.)
- Déterminer le premier chiffre. Celui-ci ne peut être que 2. (Il doit être pair, car le dernier est sa moitié et il ne peut être 4, car le deuxième serait 8). Quatre chiffres du numéro de téléphone sont ainsi déterminés : 2, 4, _, _, 3, 1.
- Définir les deux chiffres centraux, en tenant compte du fait que les chiffres doivent être tous différents et qu'alors les couples (1 ; 4), (2 ; 3) ne peuvent pas satisfaire les conditions, l'unique couple possible peut être donc (0 ; 5).
- Repérer les deux seules possibilités correctes: 2, 4, 0, 5, 3, 1 et 2, 4, 5, 0, 3, 1 et comprendre qu'on ne peut pas être certain d'appeler Louise au premier coup de fil.

Points attribués

sur 1591 classes de 20 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 5	19%	27%	27%	13%	13%	586	1.7
Cat. 6	13%	30%	29%	11%	17%	1005	1.9
tot	**15%**	**29%**	**28%**	**12%**	**15%**	**1591**	**1.8**

Avec les critères suivants d'attribution des points

4 Réponse correcte : (Non, parce qu'il y a deux numéros de téléphone possibles : 2, 4, 0, 5, 3, 1 et 2, 4, 5, 0, 3, 1) avec justification exhaustive (exclusion de certains chiffres, calculs pour les déterminer, ou table qui reproduit tous les cas avec exclusion argumentée de ceux qui ne satisfont pas les conditions)

3 Réponse correcte avec l'indication des deux possibilités, avec justifications incomplètes

2 Réponse correcte avec l'indication des deux possibilités, sans justifications
ou réponse « Oui » avec une seule des deux possibilités et explications

1 Réponse « Oui » et une possibilité erronée parce qu'on ne tient pas compte d'une condition
ou réponse « Non » mais avec une possibilité erronée

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Les résultats ci-dessus ne donnent pas d'information sur la découverte des deux solutions et la qualité des explications.

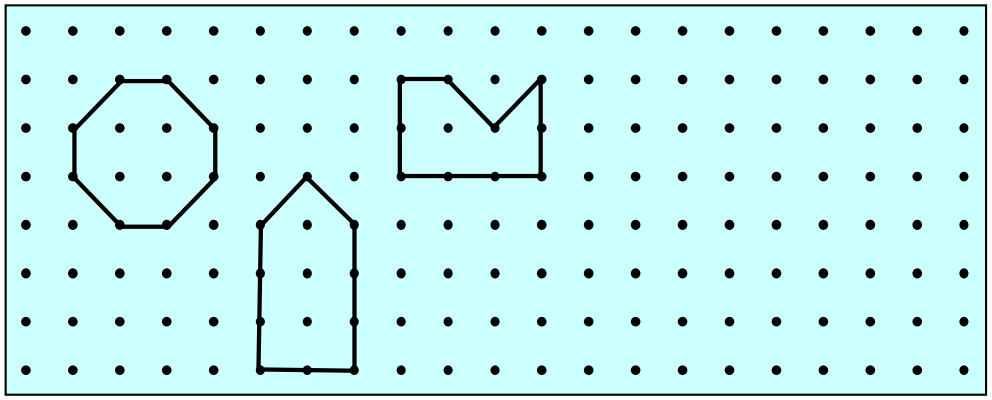
Vu la difficulté pour les catégories 5 et 6, le problème est aussi proposé en catégorie 7.

Il y a peu de « 0 point », ce qui laisse penser que les élèves ont pu s'approprier l'énoncé.

Il faudrait organiser un débat pour connaître la nature des réponses, les stratégies de résolution et/ou les erreurs les plus fréquentes.

10. TROIS AMIS ET LEURS DESSINS (Cat. 5, 6, 7)

Trois amis, Anne, Béa et Charles, ont dessiné ces trois figures sur une feuille de « papier ponctué » :



La figure d'Anne a la même aire que celle de Béa et le même périmètre que celle de Charles.

Quelle est la figure d'Anne ? Expliquez votre réponse.

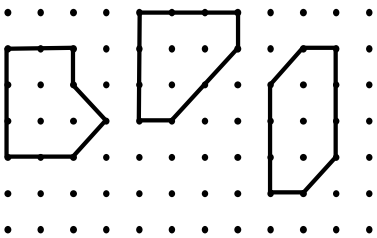
Dessinez ensuite à côté des dessins des trois amis une autre figure qui ait la même aire et le même périmètre que la figure d'Anne.

Résumé

Parmi trois polygones dessinés sur les côtés et diagonales des carrés d'un quadrillage, deux ont la même aire, et deux ont le même périmètre. Identifier celui qui a le même périmètre qu'un autre et la même aire qu'un autre, puis en dessiner un quatrième, avec les mêmes propriétés.

Analyse de la tâche

- Observer les périmètres des trois figures et reconnaître qu'il y a deux types de segments, ceux dont la longueur correspond à un côté (l) d'un « carré » et ceux dont la longueur correspond à sa diagonale (d).
- Pour chaque figure, compter ces deux types de segments et trouver leurs périmètres : l'octogone, $4\,d + 4\,l$; le pentagone, $2\,d + 8\,l$; l'hexagone : $2\,d + 8\,l$, ou faire une mesure avec une règle graduée.
- Trouver les aires des trois figures en comptant les carrés (q) et les demi-carrés : l'octogone, $7\,q$; le pentagone, $7\,q$; l'hexagone, $5\,q$, ou comparer les aires par découpages et superpositions.
- En conclure que la figure d'Anne est le pentagone.
- Donner une explication qui montre comment sont déterminées les aires les périmètres.
- Pour dessiner une figure ayant la même aire et le même périmètre que celle d'Anne, chercher une disposition de 2 segments de type d et 8 segments de type l qui donne une aire de 7 q. Il y a diverses figures possibles, comme, par exemple les suivantes :



Points attribués

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 4	30%	27%	22 %	16%	6%	427	1.4
Cat. 5	23%	29%	25%	17%	6%	493	1.6
Cat. 6	24%	24%	24%	21%	7%	876	1.7
tot	**25%**	**26%**	**24%**	**19%**	**7%**	1796	**1.6**

selon les critères d'attribution suivants :

4 Réponse complète : la figure d'Anne (le pentagone) est reconnue, avec des explications correctes et complètes, et dessin d'une figure ayant les mêmes caractéristiques que celle d'Anne

3 Réponse donnant la figure d'Anne, avec des explications incomplètes et dessin correct de la quatrième figure
ou bien la figure d'Anne reconnue avec des explications claires, mais avec un dessin de la quatrième figure partiellement correct (seulement pour l'aire ou seulement pour le périmètre)

2 Réponse partielle avec deux des trois conditions précédentes (par exemple reconnaissance de la figure d'Anne avec une explication sans dessin, ou bien reconnaissance de la figure d'Anne avec un dessin correct sans explication)

1 Reconnaissance de la figure d'Anne sans explication et sans dessin

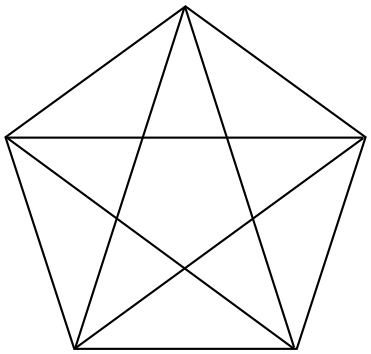
0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Problème emblématique de la confrontation aire-périmètre. Difficile en catégorie 4. Proposé désormais en catégorie 7 également.
Peu de progrès d'une catégorie à l'autre, répartition équilibrée de l'occurrence des points.
Les premières analyses de copies montrent une fréquence élevée du calcul des périmètres par le comptage des points ou des segments, considérés souvent comme isométriques, sans se rendre compte que les segments en « diagonale » sont plus longs que ceux qui sont horizontaux ou verticaux.

11. DES TRIANGLES, OUI, MAIS COMBIEN ? (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



Alice dit *: « Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça ! »*

Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Résumé

Déterminer le nombre de triangles que l'on peut observer dans une figure représentant un pentagone régulier et ses diagonales

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Savoir reconnaître des triangles dans la figure en tenant compte du caractère régulier de la figure pour identifier les triangles égaux ;
- S'organiser pour ne pas oublier de triangles, ne pas comptabiliser deux fois le même. Par exemple :
  les 10 triangles du pavage autour du pentagone central (noté p pour la suite de cette analyse); on peut éventuellement constater que 5 n'ont que des angles aigus, (notés a pour la suite) et que les 5 autres ont un angle obtus (notés o pour la suite).
  les 10 triangles composés d'un triangle o et d'un triangle a (a, o)
  les 5 triangles composés de deux triangles o et un triangle a (o, a, o), un par sommet du pentagone,
  les 5 triangles (avec une diagonale comme base), composés du pentagone central et de deux triangles a (a, p, a),
  les 5 triangles (avec un côté comme base), composés du pentagone central, un triangle o et de trois triangles a (o, a, a, p, a),
  Soit cinq types de triangles faisant au total 10 + 10 + 5 + 5 + 5 = 35 triangles.

Il y a évidemment de nombreuses autres façons d'organiser l'inventaire, avec de nombreux risques de confusions ou d'oublis :

- nommer tous les « sommets » de la figure (ou les segments) et désigner les triangles par ces sommets (ou ces segments), ce qui aboutit à une notation lourde et longue, difficile à contrôler,
- utiliser des couleurs, ce qui ne permet plus de distinguer les traits,
- nommer les 11 « pavés de base » et désigner les triangles par leur composition de ces pavés,
- travailler par types de triangles d'une autre manière que ci-dessus, en tenant compte par exemple des symétries du pentagone régulier …

La tâche principale est précisément de choisir la représentation la plus efficace pour le contrôle et l'élimination des doublons.

Points obtenus

sur 2347 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 6	21%	41%	29%	5%	4%	862	1.3
Cat. 7	16%	42%	26%	10%	7%	801	1.5
Cat. 8	11%	27%	36%	13%	12%	584	1.9
Tot	**17%**	**38%**	**30%**	**9%**	**7%**	**2247**	1.5

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (35) avec explications claires et complètes (texte, liste ou dessin)
3 Réponse correcte (35) avec explications incomplètes
ou réponse 34 ou 36 avec un seul oubli ou un seul doublon, avec explications
2 Réponse (35) sans aucune explication
ou réponse (25 ou 30) avec oubli d'un seul des 5 types de triangles, avec explications
ou réponse incorrecte due à 2 à 3 oublis ou doublons avec explications
1 Réponse (15, 20 ou 25) avec oubli de deux types de triangles
ou réponse incorrecte due à 4 ou 5 oublis ou doublons
0 Moins de 15 triangles différents repérés

Premiers commentaires

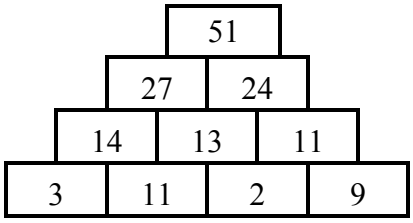
Le problème est bien « consistant », le dénombrement s'améliore avec l'âge mais reste bien aléatoire puisque seulement un quart des classes de catégorie 8 arrivent à la solution.

À exploiter :

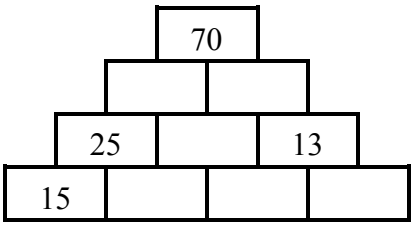
- les différentes manières de présenter les résultats ; par des symboles, par des coloriages, sur une ou plusieurs figures, réfuter ou confirmer la procédure par sommets ou côtés
- erreurs les plus fréquentes : doublons, oublis d'un triangle particulier, décomposition de la figure en cinq parties et dénombrement au sein de ces parties sans penser aux triangles communs.

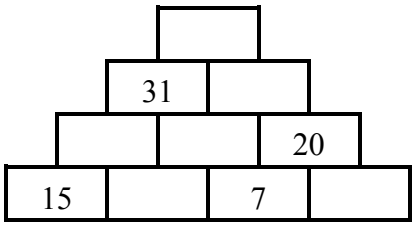
12. PYRAMIDES DE BRIQUES (II) (Cat. 6, 7, 8)

Matteo et Diego ont trouvé ce problème dans un magazine :
« Dans ces pyramides de briques, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante :
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.
Exemple :



Compléter les deux pyramides suivantes : »





Matteo et Diego commencent alors à compléter les deux pyramides proposées.

Lorsqu'ils confrontent leurs résultats, ils constatent qu'ils ont la même solution pour la pyramide de gauche.
Matteo dit qu'il n'est pas possible de compléter la pyramide de droite. En revanche, Diego, très fier de lui, affirme qu'il a trouvé les nombres qui lui permettent de la compléter selon la règle.

Complétez vous aussi les deux pyramides.

Expliquez votre raisonnement pour trouver les nombres manquants.

Résumé

Compléter deux « pyramide » de quatre étages (4, 3, 2, 1 nombres par étage) dont 4 nombres sont donnés, en respectant la règle selon laquelle chaque nombre est la somme des deux nombres sur lesquels il est situé. La chaîne de déductions se construit en combinant deux égalités pour déterminer un nombre-clé de départ. les nombres sont naturels et inférieurs à 100.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Vérifier l'exemple pour comprendre le fonctionnement de la pyramide et constater que deux briques peuvent être complétées immédiatement : 10 (25 – 15) à la base de la première pyramide et 13 (20 – 7) de la seconde.
- Constater que les autres nombres ne s'obtiennent pas directement, que des essais ou hypothèses sont nécessaires, puis chercher les « pistes » les plus favorables. Il y a par exemple de nombreuses décompositions de 70 (sommet de la première pyramide) ou de 13 (deuxième rang à droite) en somme de deux termes (même si on ne pense qu'aux nombres entiers positifs), qui exigeraient de très nombreux essais pour compléter la pyramide entière.
- Remarquer alors qu'une « clé » de la première pyramide peut être le nombre de la deuxième ligne, situé entre 25 et 13. Le « triangle » avec 25 et 13 à la base et 70 au sommet (voir figure 1) se complète alors…

  … soit par essais successifs sur le nombre-clé. (11 est trop petit, 20 est trop grand, …) pour aboutir à 16 ;

  … soit par un raisonnement déductif (ou préalgébrique) du genre : le « nombre cherché » (entre 25 et 13) sera additionné à 25 dans la case de gauche de l'étage supérieur et à 13 dans la case de droite, et finalement, 70 sera obtenu par 25 + 13 + 2 fois « le nombre cherché» ; par conséquent ce nombre sera 16, la moitié de 70 - (25 + 13) = 32,

  … soit par une procédure algébrique résumant la précédente et conduisant à l'équation : (25 + x) + (13 + x) = 70
- Le même raisonnement va aussi pour la deuxième pyramide, dans le « triangle » avec 15 et 7 à la base et 31 au sommet, (voir figure 2) mais avec un « obstacle » supplémentaire, qui fait dire à Matteo qu'on ne peut pas la compléter : …

  … par essais, on trouvera que le nombre est plus grand que 4 et plus petit que 5,

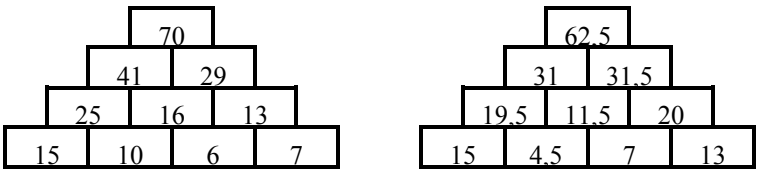
… par raisonnement préalgébrique, on trouvera que ce nombre est la moitié de 9, (Car pour obtenir 31 on effectue la somme de 15 et 7 = 22 à laquelle il faut encore ajouter 9. Par conséquent, le nombre qui doit être additionné à 15 comme à 22 doit être la moitié de 9).

… par l'algèbre, le nombre est la solution de (15 + x) + (7 + x) = 31, c'est-à-dire 4,5.

- Comprendre alors que Diego a vu que le « nombre entre 15 et 7 » n'est pas entier comme tous les autres nombres présents dans la pyramide incomplète mais que l'énoncé n'interdit pas d'utiliser des nombres non entiers pour compléter la pyramide.
- Il suffit alors de compléter les autres cases par additions et soustractions.

Figure 1 les deux « triangles » - clé des deux pyramides

Figure 2 les deux pyramides complétées



Il y a encore, évidemment, de nombreuses autres manières d'organiser les essais, mais tous doivent passer par les nombres-clés 16 et 4,5.

Points obtenus

sur 2559 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 6	15%	33%	30%	15%	7%	15%	1.7
Cat. 7	7%	22%	38%	23%	11%	7%	2.1
Cat. 8	4%	17%	40%	24%	16%	4%	2.3
Cat. 9-10	4%	15%	22%	32%	28%	4%	2.6
tot	**9%**	**24%**	**34%**	**21%**	**12%**	**9%**	2.0

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Les deux pyramides complétées, avec une explication du raisonnement (au moins une description de la démarche pour trouver les « nombres-clés »)

3 Les deux pyramides correctes mais explications incomplètes (seulement quelques opérations, sans description des essais ou du raisonnement)

2 Les deux pyramides correctes sans aucune explication

ou 1ere pyramide complétée avec explication et deuxième pyramide non complétée avec l'affirmation qu'il n'y a pas de nombres qui puissent compléter certaines briques

1 Une seule des deux pyramides correctes sans explications

ou seulement les briques 10 (25 – 15) à la base de la première pyramide et 13 (20 – 7) de la seconde

0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Réussite avec progression régulière et sensible de la catégorie 6 à la catégorie 9-10, avec 9% seulement « d'incompéhension du problème »

À exploiter pour les différentes manières de trouver le nombre-clé de chaque pyramide (équation formelle, essais, raisonnement réthorique,

13. LE PARTERRE DE TULIPES (Cat. 7, 8)

Mme Petitepart décide de planter des tulipes de couleurs différentes dans un parterre de son jardin.
Elle dispose de tulipes de huit couleurs différentes : rouge, jaune, orange, blanc, lilas, violet, rose et saumon.

Avec les tulipes rouges, elle peut occuper $\frac{1}{2}$ du parterre, avec les tulipes jaunes elle peut occuper $\frac{1}{3}$ du parterre, avec les tulipes orange $\frac{1}{4}$, avec les tulipes blanches $\frac{1}{5}$, avec les tulipes lilas $\frac{1}{6}$, avec les tulipes violettes $\frac{1}{8}$, avec les tulipes roses $\frac{1}{9}$, avec les tulipes saumon $\frac{1}{12}$.

Madame Petitepart veut occuper complètement son parterre et, pour chaque couleur choisie, elle veut utiliser toutes les tulipes à sa disposition. Mais pour y arriver, elle doit bien choisir les couleurs.
Elle se rend compte qu'elle peut choisir trois couleurs de tulipes mais, par exemple, elle ne peut pas prendre ensemble les tulipes rouges, jaunes et orange.

Quelles sont les trois couleurs de tulipes avec lesquelles Madame Petitepart peut occuper entièrement son parterre ?

Est-ce possible d'occuper entièrement le parterre avec les tulipes de quatre couleurs. Si oui, lesquelles ?

Expliquez vos réponses.

Résumé

Trouver les différentes associations des 8 nombres 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/9 et 1/12 dont le somme est 1 ; dans un contexte de réunion de parties d'un tout.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre les critères que Mme Petitepart entend respecter pour planter ses tulipes de façon à couvrir entièrement le parterre de fleurs en utilisant tous les bulbes des couleurs qu'elle aura sélectionnées.
- Observer que la partie du parterre qui peut être couverte avec une variété de tulipes est exprimée par une fraction de numérateur 1 et que l'entier correspond à la totalité du parterre.
- Se rendre compte qu'il faut trouver trois ou quatre fractions, parmi celles données, dont la somme est égale à 1.
- Constater par exemple qu'en choisissant des tulipes rouges, jaunes et orange on obtiendrait 1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12 > 1 et on couvrirait plus que le parterre.
- Procéder par essais successifs et trouver qu'en utilisant des tulipes rouges, jaunes et lilas on peut remplir exactement le parterre : 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1
- En procédant de même, trouver qu'en utilisant les tulipes rouges, oranges, lilas et saumon, on obtient une seconde solution : 1/2 + 1/4 + 1/6+ 1/12 = 1

Ou réduire au même dénominateur les 8 codes fractionnaires (le plus petit est 360) et chercher trois (puis quatre) numérateurs dont la somme est égale à 360.

Points obtenus

sur 1661 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 7	37%	11%	18%	13%	20%	819	1.7
Cat. 8	28%	8%	18%	18%	28%	608	2.1
Cat. 9	20%	8%	17%	23%	31%	128	2.4
Cat. 10	20%	5%	8%	23%	45%	106	2.7
tot	**32%**	**10%**	**18%**	**16%**	**25%**	**1661**	**1.9**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte aux deux questions (rouge, jaune, lilas) et (rouge, orange, lilas, saumon) avec explications claires

3 Réponse correcte aux deux questions avec des explications peu claires ou seulement avec une vérification

2 Réponse correcte à une seule question avec explications
ou réponse correcte aux deux questions sans explications

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

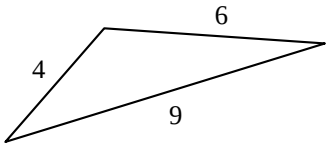
Premiers commentaires

Réussite avec progression sensible de la catégorie 7 à la catégorie 10, mais avec cependant beaucoup « d'incompéhension du problème »

À exploiter : travail avec des nombres rationnels (fractions) ou des approximations sur la calculatrice ?

14. BÂTONNETS ET TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Georges a trouvé dans une boîte six bâtonnets dont les longueurs sont : 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.
Il en choisit trois pour former un triangle.
Voici par exemple le triangle construit avec les trois bâtonnets de 4 cm, 6 cm et 9 cm de longueur :



Après avoir construit un triangle, Georges remet les trois bâtonnets dans la boîte et recommence.

Combien de triangles différents Georges pourra-t-il construire avec ses six bâtonnets ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et décrivez-les.

Résumé

Trouver le nombre de triangles différents dont les mesures des côtés sont trois des six nombres 4, 5, 6, 9, 10, 11.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que trois bâtonnets permettent de construire un seul triangle.
- Comprendre que seulement les triplets vérifiant l'inégalité triangulaire permettent de construire un triangle (par exemple les triplets comme 4 - 5 - 10 ou 4 - 5 - 9 ne le permettent pas. (Un obstacle bien connu est celui du recours au seul dessin pour décider si le triangle est constructible : car même avec un dessin précis un triangle « impossible » peut apparaître 4 - 5 - 9 ou 4 - 6 - 10 ou 5 - 6 - 11).
- Dresser l'inventaire des 14 triplets différents (sans tenir compte de l'ordre pour éviter les triangles égaux) formés avec les 6 nombres: 4, 5, 6, 9, 10, 11, en éliminant ceux qui ne respectent pas l'inégalité triangulaire (l'un ne peut pas être supérieur ou égal à la somme des deux autres).

  Trouver les 14 triplets solutions :

  4 - 5 - 6 ; 4 - 6 - 9 ; 4 - 9 - 10 ; 4 - 9 - 11 ; 4-10-11 ; 5 - 6 - 9 ; 5 - 6- 10 ; 5 - 9 - 10 ;5 - 9 - 11 ; 5 - 10 - 11 ; 6 - 9 - 10 ; 6 - 9 - 11; 6 - 10 - 11 : 9 - 10 - 11

Ou : dessiner les triangles un à un.

Ou : par manipulation, découper 6 bandes et procéder par esais successifs

- Conclure qu'il y a 14 triangles possibles (y compris celui qui figure dans l'énoncé)

Points obtenus

sur 1650 classes de 22 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 7	40%	25%	20%	9%	7%	814	1.2
Cat. 8	37%	26%	19%	8%	9%	602	1.3
Cat. 9	36%	13%	19%	10%	22%	128	1.7
Cat. 10	28%	16%	16%	13%	26%	106	1.9
tot	38%	24%	19%	9%	10%	**1650**	**1.3**

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte et complète (14 triangles donnés par leurs côtés ou par dessins) avec explications claires (inégalité triangulaire mentionnée, …)

3 Réponse correcte et complète sans explications
ou une seule erreur (13 triangles corrects et un oubli ou un seul doublon) avec explications

2 De 9 à 12 triangles corrects, oublis ou doublons ou solutions incorrectes (par ex. « triangle plat ») avec explications
ou la réponse 14, avec descriptions ou dessins mais sans explications

1 De 6 a 8 triangles corrects, avec oublis et intrus de la forme « triangle plat »
ou : réponse 20 triangles qui donne les 20 combinaisons des 6 nombres pris 3 à 3 (sans tenir compte des contraintes géométriques)

0 Incompréhension du problème ou moins de 6 triangles corrects

Premiers commentaires

Il y a beaucoup d'obstacles ou d'incompréhensions et que l'inégalité triangulaire n'est pas perçue.

D'après les expérimentations précédentes, on doit pouvoir reconnaître les élèves qui se contentent d'un calcul combinatoire, de ceux pour qui un enseignement trop abstrait a tué toute référence aux objets ou au « bon sens » géométrique.

À exploiter en classe : triangle qu'on ne peut pas construire, pourquoi ? Triangle « aplati » que les élèves construisent pourtant !!

15. LA DATE DE NAISSANCE (Cat. 8, 9, 10)

Michèle dit à son nouvel ami qu'elle est capable de découvrir le jour et le mois de sa naissance s'il suit les instructions suivantes :
« Multiplie par 13 le numéro de ton jour de naissance. Multiplie par 14 le numéro de ton mois de naissance. Additionne les deux produits et dis-moi le résultat final de tes calculs. »
Son ami lui répond : « *Le résultat final de mes calculs est 479.* »

Quels sont le jour et le mois de naissance de l'ami de Michèle?

Expliquez votre raisonnement.

Identification : op ou algx – it/fr / 21.I.15-7, 8, 9, 10 **OP /ALG**/ ? / ?

Résumé

Trouver x et y tels que 13x + 14y = 479 avec x et y naturels Ou trouver les deux multiples naturels, l'un de 13, l'autre de 14, dont la somme est 479

Mots-clés

atithmétique, multiples, somme, reste, division euclidienne, algèbre

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Analyse de la tâche, a priori :

- *La première tâche est de comprendre que le résultat demandé est la somme d'un multiple de 13 (du premier au 31e) et d'un multiple de 14 (du premier au 12e).*
  Pour bien comprendre la correspondance entre les dates et les sommes (et éventuellement s'assurer que deux dates de naissance différentes donnent deux résultats différents, et réciproquement), on peut imaginer les calculs de quelques dates, par exemple celles des premiers jours de l'année : 1 janvier 13 + 14 = 27; 2 janvier 2 × 13 + 14 = 40 ; 1 février 13 + 2 × 14 = 41 …
  en notant ces essais dans un tableau, on peut en découvrir les régularités : en janvier, des nombres qui valent 1 de plus qu'un multiple de 13, des suites de nombres entiers consécutifs en se déplaçant « en oblique » vers le bas et vers la gauche,

jours	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	20	…	30	31
janvier (1)	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	…	274		404	417
février (2)	41	54	67	80	93	106	119	132	145	158	…	288			
mars (3)	55	68	81	94	107	120	.133	146	158	172	…	302		432	445

  Ce tableau permet déjà de constater que 479 est au-delà du mois de mai car le 31 mai donne 445 + 2 × 14 = 473. (On pourrait même y voir que 479 est à 6 « pas » de 473 : 6 lignes vers le bas et 6 colonne vers la gauche, le 25 novembre).

Ou : soustraire de 479 des multiples de 14 (du 1 jusqu'au 12e pour les mois) et diviser le résultat par 13 jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre entier compris entre 1 et 31.

$$(479 - 1 \times 14) : 13 = 35{,}77$$
$$\ldots$$
$$(479 - 10 \times 14) : 13 = 26{,}08$$
$$\mathbf{(479 - 11 \times 14) : 13 = 25}$$
$$(479 - 12 \times 14) : 13 = 23{,}92$$

Donc la date de naissance de l'ami de Michèle est le 25 novembre.

Ou, par une méthode plus générique, comprendre que le résultat final est une expression du type :
479 = 13j + 14m (j = jour de naissance; m = mois de naissance)

- *En déduire la factorisation suivante : 479 = 13j + 13m + m = 13(j + m) + m,*
  constater que le mois de naissance (m) est le reste de la division euclidienne du résultat final 479 par 13 :
  479 = 36 × 13 + 11, et que le mois de naisssance est donc novembre, 11e mois de l'année.
- *en déduire le jour de naissance en résolvant l'équation suivante : 479 = j ×13 + 11×14 d'où j = 25 (ou par soustraction et division par 13 comme dans la première des procédures ci-dessus)*

Points obtenus

sur 842 classes de 21 sections

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 8	84	14	45	165	300	608	3.0
Cat. 9	20	4	6	37	61	128	2.9
Cat. 10	13	3	10	35	45	106	2.9
tot	**117**	**21**	**61**	**237**	**406**	**842**	**2.9**

en %

Cat. 8	14%	2%	7%	27%	49%
Cat. 9	16%	3%	5%	29%	48%
Cat. 10	12%	3%	9%	33%	42%
tot	14%	2%	7%	28%	48%

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Réponse correcte (25 novembre) avec explications claires et détaillées
3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou avec seulement une vérification
2 Réponse correcte sans explication
ou réponse bien expliquée mais avec un seule ereur de calcul
1 Début de raisonnement correct (essai avec une date de naissance connue)
0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

Moyennes élevées, la réponse correcte est trouvée par une grande majorité des classes mais, paradoxalement, on ne peut qu'avoir des doutes sur la « compréhension du problème ».

- la voie algébrique conduit à une équation du premier degré à deux inconnnues dont la solution ne peut se trouver que par la voie arithmétique des essais, à moins d'avoir eu l'idée d'y substituer 13+ 1 à 14 !! (ce dont on peut douter !)

il vaut donc la peine d'examiner les copies pour savoir si les groupes ont trouvé la solution en « passant à côté » de la division euclidienne qui donne la clé du problème.

C'est l'observation des procédures qui déterminera le placement du problème dans le domaine OP ou ALG, ou encore dans les deux.

16. QUADRILLAGE I (Cat. 8)

« Aujourd'hui, je vous propose une recherche en géométrie », dit le professeur en entrant dans la classe.
« J'ai préparé pour chacun de vous une feuille rectangulaire de 36 cm sur 27 cm exactement.
Vous allez la quadriller en respectant les deux règles suivantes :
- tous les carrés obtenus doivent être identiques et occuper toute la feuille,
- les côtés de vos carrés doivent mesurer au moins 1 cm.

Lorsque vous aurez terminé votre dessin, vous me direz en combien de carrés vous avez partagé votre feuille. »

Après avoir dessiné précisément de nombreux segments en s'aidant de leur règle et de leur équerre, voici les réponses que donnent quelques élèves :

- Antoine: « J'ai partagé ma feuille entière en 108 carrés identiques. »
- Berthe : « J'ai partagé ma feuille entière en 243 carrés identiques. »
- Charles : « J'ai partagé ma feuille entière en 12 carrés identiques seulement, et l'on ne peut pas arriver à moins. »
- Danièle : « J'ai partagé ma feuille entière en 1200 carrés identiques. »
- Ernest : « J'ai partagé ma feuille entière en 48 carrés identiques. »

Quelles sont les réponses que le professeur pourra accepter ? Pourquoi ?

Résumé

Rechercher les pavages d'un rectangle de 27 sur 36 cm avec des carrés isométriques dont les côtés mesurent plus de 1 cm.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la mesure de l'aire du rectangle est 36 × 27 = 972 (en cm^2), et qu'on peut ainsi calculer dans les cinq cas l'aire d'un carré :

  A) 972 : 108 = 9 B) 972 : 243 = 4 C) 972 : 12 = 81 D) 972 : 1200 = 0,81 E) 972 : 48 = 20,25
- Se rendre compte qu'il ne suffit pas d'avoir calculé l'aire d'un carré pour juger de la validité de la réponse, mais qu'il faut se demander encore si la longueur du côté est supérieure ou égale à 1 et calculer alors les côtés dans les cinq cas, soit en prenant la racine carrée de l'aire, soit en cherchant par essais un côté qui convient (en le multipliant par lui-même) :

  - pour A, B et C le calcul est mental et donne respectivement des côtés de 3, 2 et 9 (en cm),

  - pour D et E, il faut penser que les longueurs des côtés ne s'expriment pas forcément en nombres entiers et calculer ou essayer pour obtenir respectivement 0,9 et 4,5 (en cm). Éliminer donc la réponse de D (qu'on aurait aussi pu éliminer précédemment sachant que le maximum de carrés est donné par 972 carrés de 1 cm de côté.)
- Se rendre compte finalement qu'il faut encore vérifier si on peut placer un nombre entier de carrés sur la longueur et la largeur de la feuille. Par exemple, pour A, les deux divisions 36 : 3 = 12 et 27 : 3 = 9 conduisent bien à un total de 12 × 9 = 108 carrés ; pour C on obtient 36 : 9 = 4 et 27 : 9 = 3 et 4 × 3 = 12 carrés ; pour E on obtient 36 : 4,5 = 8 et 27 : 4,5 = 6 et 8 × 6 = 48 carrés. En revanche, pour B, on n'a pas un nombre entier de carrés de 2 cm de côté dans la largeur et il faut réfuter la réponse.
- Il ne reste alors plus qu'à vérifier l'affirmation de C qui dit que 12 est le nombre minimum de carrés. (C'est-à-dire des carrés de 9 cm de côté : 3 dans la largeur et 4 dans la longueur). Il suffit de vérifier que pour avoir moins de 12 carrés, il faudrait essayer d'en placer 2 ou 1 dans la largeur, ce qui n'est pas possible car 27 : 2= 13,5 qui ne divise pas 36 et 27 : 1 = 27 ne divise pas 36.
- En conclure que A, C et E donnent donc une réponse acceptable, B et D non.

Attribution des points

4 Réponse entièrement correcte (oui pour A, C, E; non pour B, D),) avec justification pour les cinq cas

3 Réponse entièrement correcte mais les justifications sont incomplètes

2 Une erreur dans les réponses, (par exemple rejet de E par des élèves qui cherchent des nombres entiers pour les longueurs des côtés des carrés), justification des quatre autres cas

1 Deux erreurs dans les réponses

0 Plus de deux erreurs ou incompréhension du problème

17. LES NOMBRES DE MONSIEUR TRAPÈZE (Cat. 8)

Monsieur Trapèze écrit les nombres naturels depuis 0, très régulièrement, en lignes et en colonnes, dans cette disposition en forme de trapèze :

					0	1	2					
				3	4	5	6	7				
			8	9	10	11	12	13	14			
		15	16	17	18	19	20	21	22	23		
	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

Arrivé à 44, il fait une pause et constate qu'il est à la 6e ligne, où il manque encore trois nombres.
Il décide d'écrire en tout 30 lignes complètes.

Quel sera le dernier nombre qu'il écrira dans sa 30e ligne ?

Expliquez votre raisonnement.

Résumé

- Arithmétique : suite de nombres naturels, avec découverte de régularités
- Algèbre : fonctions, calcul littéral

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle de construction et éventuellement compléter la sixième ligne, voire la septième. (En procédant ainsi, ligne par ligne et en s'armant de patience, on peut arriver au dernier nombre de la 30e ligne (959), avec vraisemblablement plusieurs erreurs.)

Ou : rechercher des régularités pour passer d'un terme au suivant d'une suite choisie qui traverse le trapèze de ligne en ligne (dans une colonne : + 4 ; + 6 ; + 8 ; + 10 ; + 12 ; ... ; parallèlement au côté droit du trapèze : + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ... ; parallèlement au côté gauche du trapèze : + 3 ; + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ...) et compléter un à un les termes de la suite où la régularité a été observée, jusqu'à la 30e ligne. (Cette procédure répétitive est aussi sujette à des erreurs ou inattentions.)

Ou : passer à des calculs de sommes de 30 termes issues des régularités observées. Par exemple, le 30e nombre de la colonne centrale est : 1 + 4 + 6 + 8 + … + 60 = 929, puis, comme dans la 30e ligne, il y a 61 nombres, celui du milieu est suivi des 30 entiers suivants. Le dernier nombre de la 30e ligne est donc 929 + 30 = 959.

Ou : transformer des sommes de 30 termes en produits. Par exemple, la suite des termes du côté gauche donne comme dernier terme : 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 =
2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959.

Ou : généraliser l'une ou l'autre des régularités observées précédemment par une procédure fonctionnelle.

Par exemple, la plus simple est d'identifier le deuxième nombre de la ligne n par n^2 ; ou observer que la colonne du « 2 » contient les nombres de la forme $n(n + 1)$ ...

Par exemple, comme le 2e nombre de la ligne n est n^2, on peut aller à la 31e ligne, trouver $31^2 = 961$, puis « reculer » de 2 pour arriver au dernier nombre de la 30e ligne : 959.

Pour toutes ces procédures, on peut faire appel à des tableaux ou listes organisées.

Attribution des points

4 La réponse 959 avec explication de la démarche (pas à pas, par suite, par fonction ...)

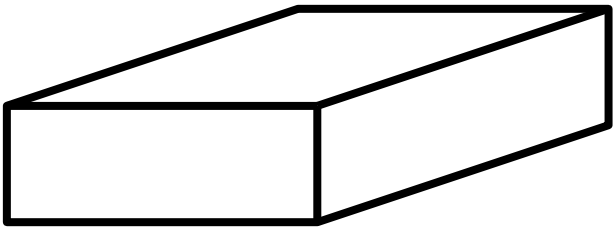
3 La réponse 959 sans explication ou avec une démarche peu claire
ou une démarche clairement exprimée mais avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante ...)

2 Découverte explicite de nombres de la dernière ligne mais erreurs successives au sein de la ligne

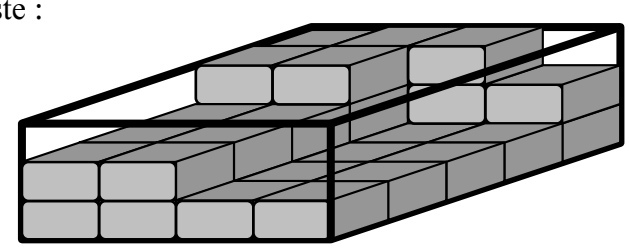
1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

1. GOURMANDISES (Cat. 3, 4)
Maman a acheté une boîte de chocolats et l'a posée sur la table.
Voici la boîte, pleine mais encore fermée, avec son couvercle :



Le lendemain matin, quand elle ouvre la boîte, elle découvre que ses enfants ont déjà mangé une partie des chocolats.
Voici ce qu'il reste :



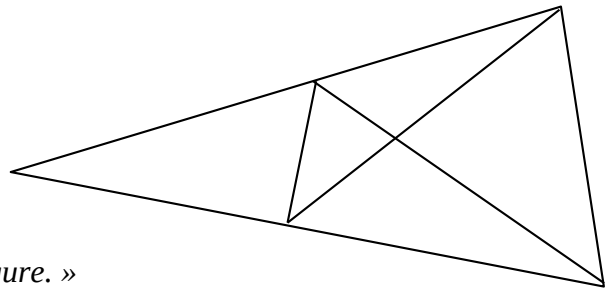
Combien de chocolats y avait-il dans la boîte quand elle était pleine ?

Combien de chocolats les enfants ont-ils déjà mangés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

2. BIEN CACHÉS (Cat. 3, 4)

André et Danièle observent cette figure :



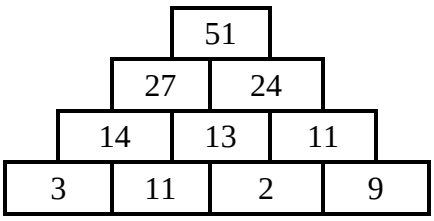
André dit : « *Je vois 5 triangles dans cette figure.* »
Danièle lui répond : « *Moi, j'en vois beaucoup plus que ça !* »

Combien peut-on voir, en tout, de triangles différents dans cette figure ?

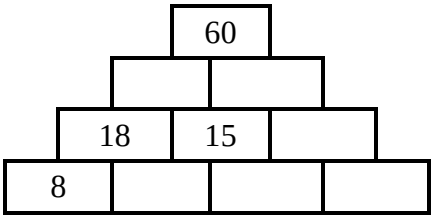
Indiquez clairement tous les triangles que vous avez trouvés.

3. PYRAMIDES DE BRIQUES (I) (Cat. 3, 4)

Dans ces pyramides, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante :
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.
Par exemple : 14 est le nombre de la brique posée sur les briques 3 et 11 car 14 = 3 + 11,
51, le nombre de la brique du haut, est la somme de 27 et 24.



Écrivez les nombres qui manquent pour compléter la pyramide ci-dessous, avec la même règle :



Notez tous les calculs que vous avez faits pour trouver les nombres manquants.

4. LE CHEMIN DANS LE PARC (Cat. 3, 4, 5)

Catherine joue dans le parc en se déplaçant sur un long chemin fait de dalles placées les unes à la suite des autres.
Pour savoir quel déplacement elle va faire, elle lance un jeton qui a une face verte et une face rouge.
Si c'est la face verte qui apparaît lorsque le jeton est tombé, Catherine avance de 4 dalles.
Si c'est la face rouge, elle recule de 2 dalles.
Au début du jeu, Catherine était sur la treizième dalle. À la fin du jeu, elle est sur la vingt-et-unième dalle.
Catherine a vu apparaître la face verte cinq fois.

Combien de fois la face rouge est-elle apparue ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

5. VACANCES D'HIVER (Cat. 3, 4, 5)

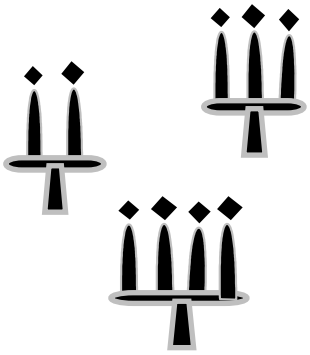
Pour ses vacances d'hiver, Michel veut acheter une tenue composée d'une veste, d'un pantalon et d'un bonnet.
Le pantalon, la veste et le bonnet sont disponibles chacun en 3 couleurs : rouge, jaune et bleu.
Michel ne veut pas de pantalon rouge. Il veut aussi que la couleur du pantalon soit différente de celle de la veste et de celle du bonnet.

Combien de tenues différentes Michel peut-il composer ?

Pour chaque tenue que vous avez trouvée, indiquez la couleur de la veste, du pantalon et du bonnet.

6. dîner aux chandelles (i) (Cat. 4, 5, 6)

Laura a organisé un dîner dans son jardin. Pour créer une belle atmosphère, elle éclaire la table avec des chandeliers à deux branches, à trois branches et à quatre branches.
Elle choisit au moins un chandelier de chaque sorte et sur chacun d'eux, elle met une bougie par branche.
Laura compte qu'elle a mis 20 bougies en tout sur les chandeliers qu'elle a utilisés.



Comment Laura a-t-elle pu placer les 20 bougies ?

Donnez toutes les possibilités.

Indiquez pour chacune le nombre de chaque type de chandeliers et expliquez votre raisonnement.

7. PARTIES DE BILLES (Cat. 5, 6)

Dimanche, Gérard a reçu un beau sac de billes et il décide de les prendre toutes, dès le lendemain à l'école, pour jouer avec ses camarades.
Le lundi, il gagne 12 billes, il est très content.
Le mardi, il rejoue, mais il perd 15 billes. Il n'est pas content.
Le mercredi, il perd encore 8 billes. Il est bien triste. De retour chez lui, il compte ses billes et il constate qu'il a perdu la moitié des billes qu'il avait le dimanche lorsqu'il a reçu son sac.
Le jeudi, il ne joue pas car il a peur de perdre encore plus de billes.
Le vendredi, il hésite, mais joue tout de même et gagne 7 billes.

Combien a-t-il de billes dans son sac le vendredi soir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

8. L'ANNIVERSAIRE (Cat 5, 6, 7)

C'est l'anniversaire d'Anita.

Son amie Berthe lui apporte un gâteau au chocolat. Sur ce gâteau, elle a placé 7 bougies qui indiquent l'âge d'Anita : des rouges et des vertes. Chaque bougie rouge vaut dix ans et chaque bougie verte vaut un an.

Son ami Charles lui apporte une tarte aux fraises sur laquelle il a placé 8 bougies qui indiquent aussi l'âge d'Anita : des bleues et des vertes. Chaque bougie bleue vaut douze ans et chaque bougie verte vaut un an.

Quel est l'âge d'Anita ?

Expliquez comment vous avez trouvé son âge.

9. LE NUMÉRO DE TÉLEPHONE DE LOUISE (Cat. 5, 6, 7)

Louise a changé de numéro de téléphone et transmet le nouveau numéro à son amie Carla, avec un message sous forme de devinette :

Mon nouveau numéro est composé de 6 chiffres tous différents. Tu dois, en outre, savoir que :
- la somme de tous les chiffres est 15 ;
- le dernier chiffre est la moitié du premier ;
- le deuxième chiffre est le double du premier ;
- l'avant-dernier chiffre vaut 1 de plus que le double du dernier.

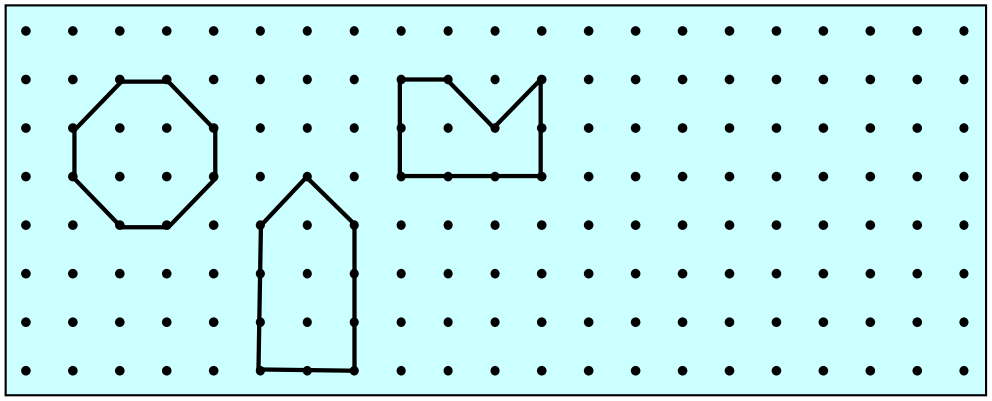
Avec ces indices, est-ce que Carla arrivera à trouver le nouveau numéro de Louise et à être sûre de l'appeler du premier coup ?

Quel pourrait être ce numéro ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la solution.

10. TROIS AMIS ET LEURS DESSINS (Cat. 5, 6, 7)

Trois amis, Anne, Béa et Charles, ont dessiné ces trois figures sur une feuille de « papier ponctué » :



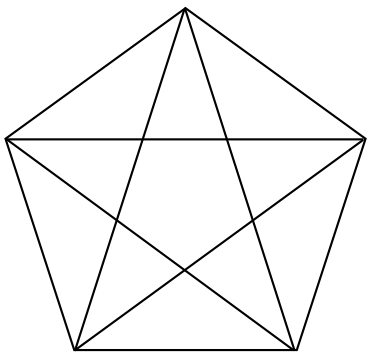
La figure d'Anne a la même aire que celle de Béa et le même périmètre que celle de Charles.

Quelle est la figure d'Anne ? Expliquez votre réponse.

Dessinez ensuite à côté des dessins des trois amis une autre figure qui ait la même aire et le même périmètre que la figure d'Anne.

11. DES TRIANGLES, OUI, MAIS COMBIEN ? (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



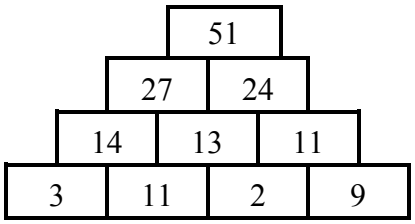
Alice dit *: « Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça ! »*

Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?

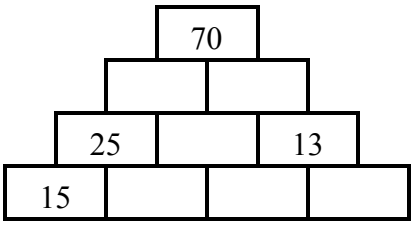
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

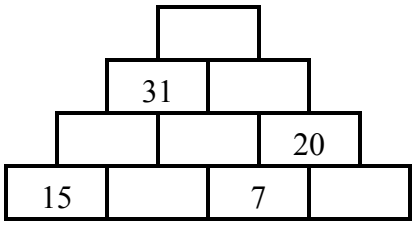
12. PYRAMIDES DE BRIQUES (II) (Cat. 6, 7, 8)

Matteo et Diego ont trouvé ce problème dans un magazine :
« Dans ces pyramides de briques, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante :
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.
Exemple :



Compléter les deux pyramides suivantes : »





Matteo et Diego commencent alors à compléter les deux pyramides proposées.

Lorsqu'ils confrontent leurs résultats, ils constatent qu'ils ont la même solution pour la pyramide de gauche.
Matteo dit qu'il n'est pas possible de compléter la pyramide de droite. En revanche, Diego, très fier de lui, affirme qu'il a trouvé les nombres qui lui permettent de la compléter selon la règle.

Complétez vous aussi les deux pyramides.

Expliquez votre raisonnement pour trouver les nombres manquants.

13. LE PARTERRE DE TULIPES (Cat. 7, 8)

Mme Petitepart décide de planter des tulipes de couleurs différentes dans un parterre de son jardin.
Elle dispose de tulipes de huit couleurs différentes : rouge, jaune, orange, blanc, lilas, violet, rose et saumon.

Avec les tulipes rouges, elle peut occuper $\frac{1}{2}$ du parterre, avec les tulipes jaunes elle peut occuper $\frac{1}{3}$ du parterre, avec les tulipes orange $\frac{1}{4}$, avec les tulipes blanches $\frac{1}{5}$, avec les tulipes lilas $\frac{1}{6}$, avec les tulipes violettes $\frac{1}{8}$, avec les tulipes roses $\frac{1}{9}$, avec les tulipes saumon $\frac{1}{12}$.

Madame Petitepart veut occuper complètement son parterre et, pour chaque couleur choisie, elle veut utiliser toutes les tulipes à sa disposition. Mais pour y arriver, elle doit bien choisir les couleurs.
Elle se rend compte qu'elle peut choisir trois couleurs de tulipes mais, par exemple, elle ne peut pas prendre ensemble les tulipes rouges, jaunes et orange.

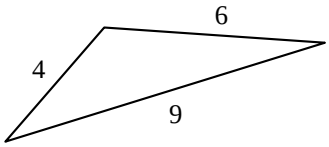
Quelles sont les trois couleurs de tulipes avec lesquelles Madame Petitepart peut occuper entièrement son parterre ?

Est-ce possible d'occuper entièrement le parterre avec les tulipes de quatre couleurs. Si oui, lesquelles ?

Expliquez vos réponses.

14. BÂTONNETS ET TRIANGLES (Cat. 7, 8)

Georges a trouvé dans une boîte six bâtonnets dont les longueurs sont : 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.
Il en choisit trois pour former un triangle.
Voici par exemple le triangle construit avec les trois bâtonnets de 4 cm, 6 cm et 9 cm de longueur :



Après avoir construit un triangle, Georges remet les trois bâtonnets dans la boîte et recommence.

Combien de triangles différents Georges pourra-t-il construire avec ses six bâtonnets ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et décrivez-les.

15. LA DATE DE NAISSANCE (Cat. 8)

Michèle dit à son nouvel ami qu'elle est capable de découvrir le jour et le mois de sa naissance s'il suit les instructions suivantes :
« Multiplie par 13 le numéro de ton jour de naissance. Multiplie par 14 le numéro de ton mois de naissance. Additionne les deux produits et dis-moi le résultat final de tes calculs. »
Son ami lui répond : « *Le résultat final de mes calculs est 479. »*

Quels sont le jour et le mois de naissance de l'ami de Michèle?

Expliquez votre raisonnement.

16. QUADRILLAGE I (Cat. 8)

« Aujourd'hui, je vous propose une recherche en géométrie », dit le professeur en entrant dans la classe. « J'ai préparé pour chacun de vous une feuille rectangulaire de 36 cm sur 27 cm exactement.

Vous allez la quadriller en respectant les deux règles suivantes :

- tous les carrés obtenus doivent être identiques et occuper toute la feuille,
- les côtés de vos carrés doivent mesurer au moins 1 cm.

Lorsque vous aurez terminé votre dessin, vous me direz en combien de carrés vous avez partagé votre feuille. »

Après avoir dessiné précisément de nombreux segments en s'aidant de leur règle et de leur équerre, voici les réponses que donnent quelques élèves :

- Antoine: « J'ai partagé ma feuille entière en 108 carrés identiques. »
- Berthe : « J'ai partagé ma feuille entière en 243 carrés identiques. »
- Charles : « J'ai partagé ma feuille entière en 12 carrés identiques seulement, et l'on ne peut pas arriver à moins. »
- Danièle : « J'ai partagé ma feuille entière en 1200 carrés identiques. »
- Ernest : « J'ai partagé ma feuille entière en 48 carrés identiques. »

Quelles sont les réponses que le professeur pourra accepter ? Pourquoi ?

17. LES NOMBRES DE MONSIEUR TRAPÈZE (Cat. 8)

Monsieur Trapèze écrit les nombres naturels depuis 0, très régulièrement, en lignes et en colonnes, dans cette disposition en forme de trapèze :

						0	1	2				
					3	4	5	6	7			
				8	9	10	11	12	13	14		
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
		24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			

Arrivé à 44, il fait une pause et constate qu'il est à la 6e ligne, où il manque encore trois nombres.
Il décide d'écrire en tout 30 lignes complètes.

Quel sera le dernier nombre qu'il écrira dans sa 30e ligne ?

Expliquez votre raisonnement.